

Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Frau Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



Universität Hamburg

6. November 2007

Beachtungswertes

- ▶ Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- ▶ Übungsaufgaben → <http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html>
- ▶ Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!
- ▶ Übungshefte: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.
- ▶ Als Formelsammlung empfehlen wir: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Klaus Veters, 3. Auflage, Teubner 2001.

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html>

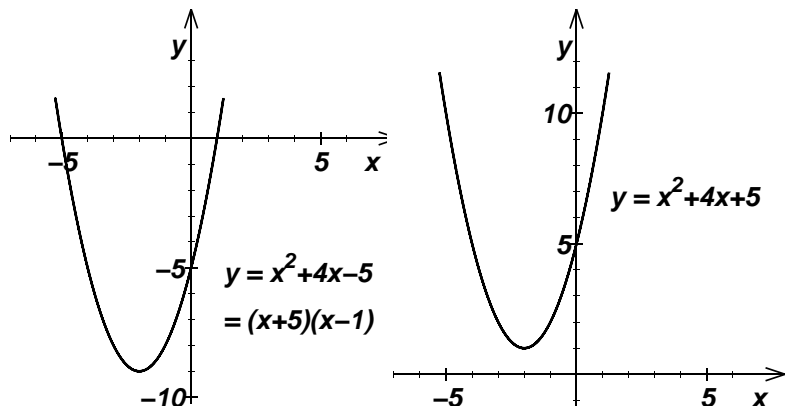


Abb. 1.22: Quadratische Gleichungen mit und ohne Lösungen in \mathbb{R}

Erweiterung von \mathbb{R} notwendig → Komplexe Zahlen, siehe Lineare Algebra.

Definition 2.12: (Zahlenfolge)

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = f(n)$, die jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt unendliche Zahlenfolge und wird auch mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder auch kurz mit (a_n) bezeichnet. a_n heißt das n -te Glied der unendlichen Zahlenfolge.

Bildet f nur jede natürliche Zahl zwischen 1 und N in die Menge der reellen Zahlen ab ($f : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$), so erhält man eine endliche Zahlenfolge oder ein N -Tupel reeller Zahlen (a_1, a_2, \dots, a_N) .

Buch Kap. 2.4 – Folgen reeller Zahlen, ein Exkurs

- ▶ **Definition 2.13:** (a_n) heißt **Nullfolge**, wenn wir zu jedem beliebigen $\epsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ finden können, so dass

$$|a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, kurz $\lim a_n = 0$.

- ▶ **Definition 2.14:** (a_n) konvergiert gegen a gdw $(a_n - a)$ Nullfolge ist. Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, kurz $\lim a_n = a$.
- ▶ **Definition 2.15:** (a_n) heißt **CAUCHY-Folge**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall m, n \geq n_0 \quad \text{gilt.}$$

- ▶ **Definition 2.17:** $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ ($n_k \in \mathbb{N}$) heißt Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Konvergiert eine Teilfolge gegen ξ , so heißt ξ Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ▶ **Satz 2.2 (modifiziert):** $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a bzw. $b, \alpha \in \mathbb{R}$.
 1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n,$
 2. $\lim \alpha a_n = \alpha \lim a_n,$
 3. $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n,$
 4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n},$ falls $b \neq 0,$
 5. $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \implies \lim a_n \leq \lim b_n.$
- ▶ **Satz 2.4 (Eigenschaften beschränkter Folgen nach Bolzano-Weierstraß).** Dabei (a_n) beschränkt :gdw $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit fixen reellen Zahlen A, B .
 1. Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge, oder äquivalent, (a_n) besitzt einen Häufungspunkt,
 2. Jede beschränkte monotone Folge (a_n) konvergiert.
- ▶ **Satz 2.3 (Vollständigkeitsaxiom):** (a_n) konvergiert genau dann, wenn (a_n) CAUCHY-Folge ist.