Zahlenfolgen

$$\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(n) =: a_n$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \equiv (a_n)$ Zahlenfolge

__Bsp__ i.) $a_n := \frac{1}{n}$

ii) $\sqrt[n]{n} =: a_n$

iii) $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5$

iv.) $S_n := \sum_{j=0}^{n} a_j \, , \quad a_j := \frac{1}{j!}$

(S_n) "Reihe"

Folge von Partialsummen

v.) $a_0 := 1 \qquad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

für $k \in \mathbb{N}$

61107 (2)

Folgen Konvergenz

i.) (a_n) mit $a_n := \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0, ist also Nullfolge

„$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$"

<u>Nachweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$|a_n| < \varepsilon$ gdw $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$n_0 := \underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]}_{} + 1 \equiv n_0(\varepsilon)$

kleinste ganze Zahl größer oder gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ (Gauß-/Entier-Funktion)

Damit: $n \geq n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon$,

also (a_n) NF.

ii) $q \in (-1, 1)$, $a_n := |q|^n$

Dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ q fest gewählt

6.1107 ③

<u>Nachweis:</u> $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$

Es gilt (Bernoulli Ungleichung)

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad \forall_{\substack{h \geq -1 \\ n \in \mathbb{N}}}$$

Damit

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh \geq nh$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| = |q|^n \leq \frac{1}{nh} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

denn h ist fix, d.h.

$$\lim |q|^n = 0.$$

61107 (4)

Seien (a_n) ~~(b_n)~~ NF, (b_n) Folge

i.) Es gelte $|a_n| \geq |b_n| \; \forall_{n \in \mathbb{N}}$

Dann (b_n) NF, denn sei $\varepsilon > 0$:

$$|b_n| \leq |a_n| < \varepsilon \quad , n \geq n_0(\varepsilon)$$

Damit (b_n) NF.

ii) $(a_n), (b_n)$ NF$_n$

$(a_n + b_n)$ NF

Sei $\varepsilon > 0$:

$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

falls $n \geq n_0(\varepsilon)$, denn $(a_n), (b_n)$ NF$_n$

iv.) ~~iii)~~ (a_n) NF $\rightarrow$ $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$ fest, ist NF

$\hookrightarrow$ gleich!

iii) (a_n) NF, (b_n) NF

$\rightarrow$ $(a_n b_n)$ NF

Nachweis ii) liefert $(m a_n)$ NF, falls $m \in \mathbb{N}$ fix

$\xrightarrow{\text{i.)}}$ $(c_1 a_n)$ NF, $c_1 \in \mathbb{R}$ fix, denn $(m a_n)$ mit $m := [c_1]$ ist NF.

(a_n) NF $\rightarrow$ $|a_n| \leq |c_1|$ $n \geq n_0(c_1)$

$\rightarrow$ $|a_n b_n| \leq |c_1||b_n| < |c_1| \varepsilon$, falls $|b_n| < \varepsilon$

$\xrightarrow{\text{i.)}}$ $(a_n b_n)$ NF

iv.) $a_n^k = \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{k\text{-mal}}$

$= a_n b_n$ mit $b_n := \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{k-1\text{-mal}}$

$\rightarrow$ $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ NF!

Sätze von Bolzano - Weierstraß

i.) Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\sup\{a_k;\, k\in\mathbb{N}\}}_{\text{kleinste obere Schranke von } \{a_k;\, k\in\mathbb{N}\}} =: S$$

<u>Nachweis</u>: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Def. von S gibt es a_N mit

$$S-\varepsilon \cancel{\geq (a_N - S)} \leq a_N \leq a_n \leq S,$$

falls $n \geq N$, da (a_n) monoton wachsend

$$\Rightarrow \quad \underbrace{S-a_n}_{\geq 0} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N = N(\varepsilon)$$

$$\rightarrow \quad \lim a_n = S$$

Analog: (a_n) beschränkt, monoton fallend. Dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\inf\{a_k;\ k\in\mathbb{N}\}}_{\text{größte untere Schranke}}$$

"Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente TF"

Bew. Idee $\quad A \le a_n \le B \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$,

d.h. $a_n \in [A, B]$

Intervallschachtelung durchführen

↳ siehe 13.11.07

Bsp: $a_0 := 1, \quad a_{k+1} := \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

Beh.: (a_k) konvergent mit

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \sqrt{2}$$

Bew.: i.) $a_k \geq \sqrt{2}$, $k \geq 1$,

denn $a_{k+1} a_k = \frac{1}{2}(a_k^2 + 2)$

$\rightarrow \quad a_k(a_{k+1} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(a_k - \sqrt{2})^2 \geq 0$

$\Rightarrow \quad a_{k+1} \geq \sqrt{2}$, weil $a_k > 0$

für alle k (Beschränktheit nach unten)

ii) $a_{k+1} \leq a_k$, denn

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{a_k^2}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\rightarrow$ (a_k) monoton fallend, insges. konvergent

Damit

61107

(9)

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad k \to \infty$$

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 = 2$$

d.h. $\quad a = \sqrt{2}$