Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Frau Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

Universität Hamburg

13. November 2007

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 2.4 – Folgen reeller Zahlen, ein Exkurs

- **Definition 2.13:** (a_n) **heißt** <u>**Nullfolge**</u>**, wenn wir zu jedem beliebigen** $\epsilon > 0$ **einen Index** $n_0 \in \mathbb{N}$ **finden können, so dass**

$$|a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$**, kurz** $\lim a_n = 0$**.**

- **Definition 2.14:** (a_n) **konvergiert gegen** a **gdw** $(a_n - a)$ **Nullfolge ist. Notation:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$**, kurz** $\lim a_n = 0$**.**
- **Definition 2.15:** (a_n) **heißt** CAUCHY**-Folge, wenn es zu jedem** $\epsilon > 0$ **ein** $n_0 \in \mathbb{N}$ **gibt, so dass**

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall \quad m, n \geq n_0 \quad \text{gilt.}$$

- **Definition 2.17:** $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **mit** $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots \quad (n_k \in \mathbb{N})$ **heißt** <u>**Teilfolge**</u> **von** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$**. Konvergiert eine Teilfolge gegen** ξ**, so heißt** ξ **Häufungspunkt der Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$**.**

Buch Kap. 2.4 – Folgen reeller Zahlen, Exkurs weiter

- **Satz 2.2 (modifiziert): $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a bzw. b, $\alpha \in \mathbb{R}$.**
  1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,
  2. $\lim \alpha a_n = \alpha \lim a_n$,
  3. $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$,
  4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, falls $b \neq 0$,
  5. $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$.
- **Satz 2.4 (Eigenschaften beschränkter Folgen nach Bolzano-Weierstraß). Dabei (a_n) beschränkt :gdw $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit fixen reellen Zahlen A, B.**
  1. Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge, oder äquivalent, (a_n) besitzt einen Häufungspunkt,
  2. Jede beschränkte monotone Folge (a_n) konvergiert.
- **Satz 2.3 (Vollständigkeitsaxiom): (a_n) konvergiert genau dann, wenn (a_n) CAUCHY-Folge ist.**

Buch Kap. 3.1 – Exkurs Reihen

(s_n) mit $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ heißt Reihe.

Notwendig für Konvergenz: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Satz 3.2 (Monotoniekriterium): $a_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und (s_n) beschränkt, dann (s_n) konvergent.

Satz 3.3 (Cauchy Kriterium): (s_n) konvergent gdw es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit, s.d. $|\sum_{i=n+1}^{m} a_i| < \epsilon$ für alle $m > n \geq n_\epsilon$ erfüllt ist.

Satz 3.4 (Leibniz Kriterium): (a_k) sei monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert (s_n) mit $s_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$.

Definition 3.3 (Absolute Konvergenz): (s_n) heißt absolut konvergent, falls (b_n) mit $b_n := \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ konvergiert.

Buch Kap. 3.1 – Exkurs Reihen weiter

Satz 3.7 (Majorantenkriterium): Ist $(s_n) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ absolut konvergent und gilt $|b_i| \leq |a_i|$ für alle $i \geq n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ absolut konvergent.

Satz 3.11 (Quotienten- und Wurzel-Kriterium): $(s_n) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

- **(Quotienten-Kriterium): $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und $\lim\limits_{k\to\infty, k\geq k_0} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = d < \infty$, oder**
- **(Wurzel-Kriterium): $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d < \infty$;**

dann ist (s_n) absolut konvergent, falls $d < 1$ und divergent, falls $d > 1$.