131107 (1)

Nachweis Bolzano Weierstraß mittels Intervallschachtelung (-halbierung)

Algorithmus

$A_1 := A \qquad B_1 := B \qquad k = 1$

(*) $M := \frac{1}{2}(A_k + B_k)$

Ist $\{n;\ a_n \in [A_k, M]\}$ unendlich:

$A_{k+1} := A_k \quad B_{k+1} := M$

Sonst ($\{n;\ a_n \in [M, B_k]\}$ unendlich):

$A_{k+1} := M \quad B_{k+1} := B_k$

$k = k+1$, gehe zu (*)

Beachte: (A_k) monoton wachsend
(B_k) monoton fallend

131107 (2)

Beachte weiter:

$$A \le A_k \le B_k \le B \quad \forall_{k \in \mathbb{N}}$$

$$B_k - A_k = \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}}}_{\downarrow} (B - A)$$

$$k \to \infty \quad \begin{array}{ccc} B_k & A_k & \frac{1}{2^{k-1}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z & s & 0 \end{array} \quad (k \to \infty)$$

$$z = \lim_{k \to \infty} B_k = \lim_{k \to \infty} A_k = s$$

Auswahl der Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

$$n_1 = 1 \qquad k = 1$$

Wähle $n_{k+1} > n_k$ mit

$$a_{n_{k+1}} \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$$

$$\rightarrow \lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [A_k, B_k]$$

Bsp: $a_n := (-1)^n \Rightarrow |a_n| = 1$

Intervallschachtelung mit $A = -2, B = 2$, $a_n \in [-2, 2]$, liefert

$a_{n_k} = -1 \quad k \in \mathbb{N}$

Achtung: Resultat abhängig von Reihenfolge der Abfrage

Bsp: $a_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$

(a_n) Reihe

i.) a_n wächst monoton ✓

ii) a_n beschränkt, denn

$a_n \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} 2^{1-j}$

weil $\frac{1}{j!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot j} \leq \frac{1}{1\cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{j-1 \text{ mal}}}$

$\Rightarrow \quad a_n \leq 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} < 3$

(a_n) beschränkt, monoton wachsend

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = e \leq 3$

Nenne e Eulersche Zahl

<u>Reihen</u>: (s_n) mit $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

Cauchy Konvergenzkriterium:

(s_n) konvergiert gdw

$|s_m - s_n| < \varepsilon \quad \forall m,n \geq n_0(\varepsilon)$

13.11.07 (5)

$$S_m - S_n = \sum_{i=n+1}^{m} a_i \qquad (m>n)$$

$m = n+1$: $\quad S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

$\rightarrow$ (a_n) muß Nullfolge sein!

$\blacksquare$

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

mit $a_k \geq 0$ und $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

monoton fallend.

Dann konvergent (s_n) und

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq \lim_{n\to\infty} s_n \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

Nachweis

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k$$

$$v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

Damit

$$u_{n+1} = u_n + \overbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}^{\geq 0} \geq u_n$$

$$v_{n+1} = v_n - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \leq v_n$$

$$v_n = u_n + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq u_n$$

$$\Rightarrow \quad v_n - u_n = a_{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

$\xrightarrow{\text{Intervall}}$ $\xrightarrow{\text{schachtelung}}$

$$u_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq v_n \qquad \square$$

<u>Bsp</u>: $(s_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$

$\lim_{n\to\infty} s_n$ existiert, weil $\frac{1}{k+1} \searrow 0$

für $k \to \infty$ und $\frac{1}{k+1} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

<u>Aber</u>: $\tilde{s}_n := \sum_{k=0}^{n} \left|(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$

nicht konvergent! (Nachweis mit Hilfe des Cauchy Konvergenzkriteriums)

$\leadsto$ absolut konvergente Reihen

Konvergenzkriterien

i.) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

gdw beschränkt $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_n$

(Nachweis mit Bolzano Weierstraß)

ii) Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le d < 1 \quad \forall_{k \geq n_0}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

<u>Nachweis</u>:

induktiv

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le d \Rightarrow |a_k| \le d^{k-n_0} |a_{n_0}|$$

131107 (9)

Also

"Mal"

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \le \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| + |a_{n_0}| \cdot \sum_{j=0}^{n-n_0} d^j$$

$$\le \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| + |a_{n_0}| \frac{1}{1-d}$$

weil $\sum_{j=0}^{\infty} d^j = \frac{1}{1-d}$ (geometrische Reihe

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$

$\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt,

also konvergent nach i.) / absolut konv.

Analog: Wurzelkriterium ($\sqrt[k]{|a_k|} \le d < 1 \ \forall_{k \ge k_0} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$)

Bsp: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)k}$

Beh: (s_n) (absolut) konvergent mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

Nachweis: $\frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)k} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \blacksquare$$

Bsp: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ fix.

Beh.: $(s_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ konvergent (absolut)

Nachweis: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$

$$< 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)k} < 2$$

nach vorherigen Bsp. $\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} s_n$ ex.

Es gilt:

$m=2: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $m=4: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ohne Nachweis!