Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Frau Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

20. November 2007

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion

Defintion 2.1: (reelle Funktion einer reellen Veränderlichen)
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt eine Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},$$

welche jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen.
$D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt Definitionsbereich und

$$W = \{y \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$$

Wertebereich von f.
Sind $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir

$$f(A) := \{y \in B | \text{ es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$$

die Bildmenge von A, und

$$f^{-1}(B) := \{x \in A | f(x) \in B\}$$

die Urbildmenge von B.

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion

Defintion 2.1 (Fortsetzung)
Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ heißt

- **injektiv (eineindeutig), falls**

$$a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$

- **surjektiv (Abbildung auf, $f(A) = B$),**

$$\forall b \in B \; \exists \, a \in A : \quad b = f(a).$$

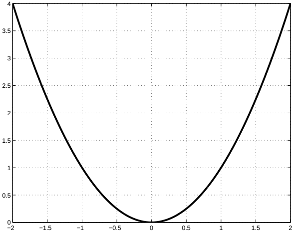
- **bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.**

Die Funktionen f und g sind gleich ($f = g$), genau dann, wenn

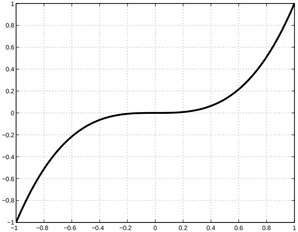
- **$D(f) = D(g)$ und**
- **$f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$**

gilt.

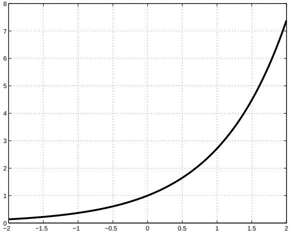
Buch Kap. 2.1 – einige Funktionen



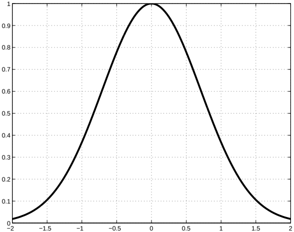
x^2



x^3

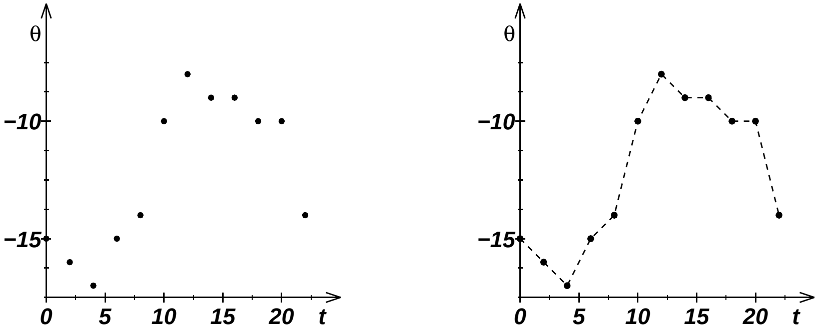


e^x



e^{-x^2}

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion



Links: Abb. 2.2, Temperaturmessreihe $\theta(t)$ am 5.12.98.
Rechts: Abb. 2.3: Temperaturmessreihe linear interpoliert.

Definition 2.2: (Umkehrfunktion f^{-1})

Ist $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ bijektiv, so ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet. Damit ist eine Funktion $f^{-1} : B \to A$ gemäß

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{falls} \quad y = f(x),$$

definiert, welche Umkehrfunktion zu f heißt.

Natürlich ist dann auch $f^{-1} : B \to A$ bijektiv.

Buch Kap. 2.1 – Umkehrfunktion

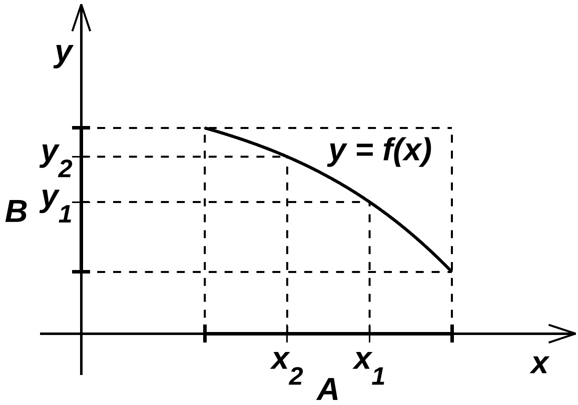


Abbildung 2.4: Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = x$ einer bijektiven Funktion $y = f(x)$ ist bijektiv

Buch Kap. 2.1 – Umkehrfunktion

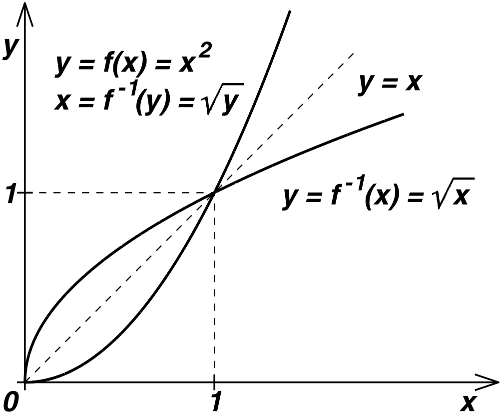


Abbildung 2.5: Umkehrfunktion $y = \sqrt{x}$ zu $y = x^2$,
$A = B = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Buch Kap. 2.1 – Umkehrfunktion

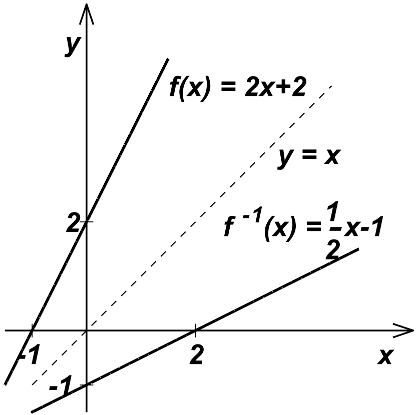
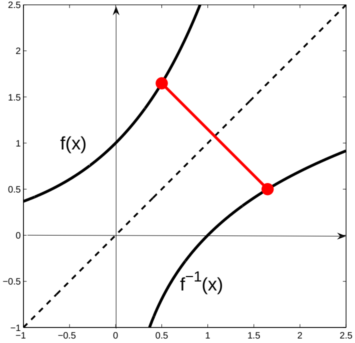


Abbildung 2.6: Funktion und Umkehrfunktion einer linearen Abbildung

Buch Kap. 2.1 – Berechnung der Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1) **$y = f(x)$ nach x auflösen $\to$ $x = f^{-1}(y)$,**
2) **x und y vertauschen $\to$ $y = f^{-1}(x)$.**



$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$

Buch Kap. 2.1 – Verkettung von Funktionen

Definition 2.3: (Verkettung von Funktionen)
Sind die Funktionen $f : A \longrightarrow B$ und $g : C \longrightarrow D$ mit $B \subset C$ gegeben, so ist jedem $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und diesem durch die Funktion g das Element $g(f(x)) \in D$.

Das Nacheinanderausführen von f und g liefert eine Funktion

$$h = g \circ f : A \longrightarrow D.$$

Wir nennen $h = g \circ f$ zusammengesetzte oder verkettete Funktion.

Buch Kap. 2.2 – Gerade und Ungerade bei Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, wobei D symmetrisch zur 0.

Definition 2.7: (gerade und ungerade Funktionen)
f heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}, \text{ falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{array} \right\} \text{ für alle } x \in D$$

erfüllt ist.

Buch Kap. 2.2 – Beschränktheit bei Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

Definition 2.4: (beschränkte Funktion)

f heißt auf der Menge $M \subset D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nach oben} \\ \text{nach unten} \end{array} \right\} \text{ beschränkt, falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq o \\ f(x) \geq u \end{array} \right\} \text{ für alle } x \in M$$

gilt mit Konstanten $-\infty < u, o < \infty$.

f heißt auf M beschränkt, falls f dort nach oben und nach unten beschränkt ist.

Buch Kap. 2.2 – Monotonie bei Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

Definition 2.5: (monoton fallend und steigende Funktion)

f heißt auf dem Intervall $I \subset D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(streng) monoton steigend} \\ \text{(streng) monoton fallend} \end{array} \right\}, \text{ falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x)(<) \leq f(y) \\ f(x)(>) \geq f(y) \end{array} \right\} \text{ für alle } x, y \in I, x < y$$

erfüllt ist.

Buch Kap. 2.2 – Konkav und Konvex bei Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion.

Definition 2.6: (konkave und konvexe Funktionen)

f heißt auf dem Intervall $I \subseteq D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(strikt) konkav} \\ \text{(strikt) konvex} \end{array} \right\}, \text{ falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\alpha x + (1-\alpha)y)(>) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \\ f(\alpha x + (1-\alpha)y)(<) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \end{array} \right\}$$

für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in [0{,}1]$ erfüllt ist.

Buch Kap. 2.2 – Konkav und Konvex bei Funktionen

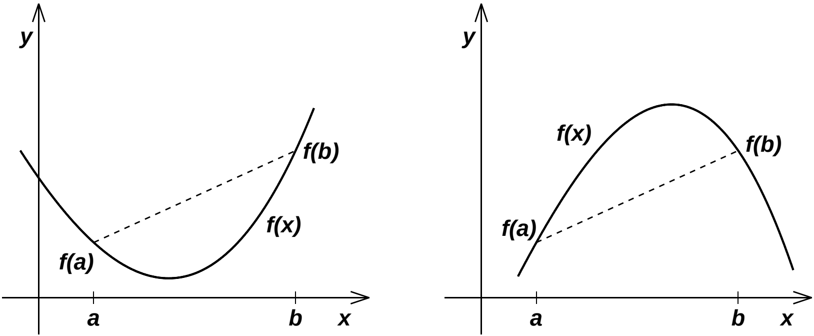


Abb. 2.8 (links): f streng konvex (von unten).
$graph(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ liegt für $a \leq x \leq b$ unterhalb der Geraden durch $(a, f(a)), (b, f(b))$.
Abb. 2.9 (rechts): f streng konkav (von unten). $graph(f)$ liegt für $a \leq x \leq b$ oberhalb der Geraden durch $(a, f(a)), (b, f(b))$.