# Analysis I

**Michael Hinze**
**(zusammen mit Frau Peywand Kiani)**

**Department Mathematik**
**Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg**

Universität Hamburg

**4. Dezember 2007**

# Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

# Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

**Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:**
**http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**

# Buch Kap. 2.4 – Grenzwert von Funktionen

**Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion über Folgen)**
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktion.
$f(x)$ strebt für $x \longrightarrow a$ (von links) {von rechts} gegen $g$, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D$, $x_n \neq a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (und $x_n < a$, $n \in \mathbb{N}$) {und $x_n > a$, $n \in \mathbb{N}$} schon $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$ gilt.
$g$ heißt (linksseitiger){rechtsseitiger} Grenzwert von $f$ bei $a$.
**Notation:**

- $g = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ($g$ Grenzwert),
- $g = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ($g$ linksseitiger Grenzwert),
- $g = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ {$g$ rechtsseitiger Grenzwert}

**Beachte:** $a$ muss kein Element von $D$ sein, und $g$ muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion $f$ sein.

# Buch Kap. 2.4 – Grenzwertwertsätze für Funktionen

**Es werden jeweils Grenzwerte für einen der Fälle**

$$x \longrightarrow a, \quad x \longrightarrow a+0, \quad x \longrightarrow a-0, \quad x \longrightarrow \infty, \quad x \longrightarrow -\infty$$

**betrachtet. Falls die entsprechenden Grenzwert $\lim f$, $\lim g$ und $\lim h$ existieren, gelten die Regeln**

(i) $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$ ,

(ii) $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$ ,

(iii) $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ falls $\lim g \neq 0$,

(iv) $f \leq g \Longrightarrow \lim f \leq \lim g$,

(v) $f \leq g \leq h \wedge \lim f = \lim h = y \Longrightarrow \lim g = y$.

# Buch Kap. 2.4 – Grenzwerte von Funktionen

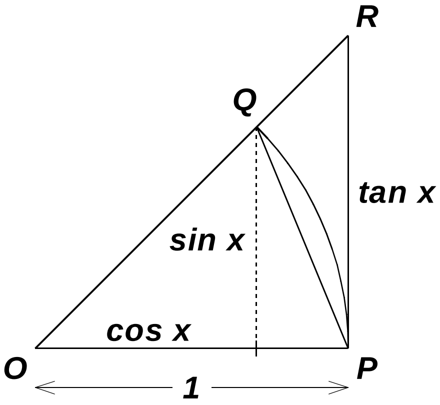



**Abbildung 2.21: Skizze zur Grenzwertbetrachtung $\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x}$**

# Buch Kap. 2.4 – Stetigkeit von Funktionen

**Definition 2.18:(Stetigkeit einer Funktion) Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt linksseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

**gilt.**
**Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt rechtsseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

**gilt.**
**Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**gilt.**
**Die Funktion heißt stetig auf $D$, falls sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.**

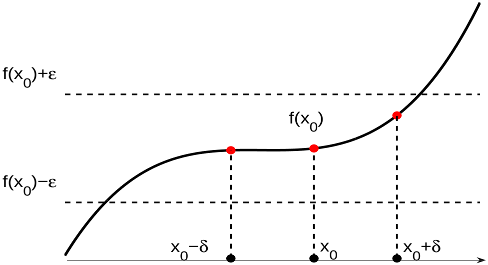
# Buch Kap. 2.4 – Stetigkeit von Funktionen mit $\epsilon - \delta$

**Satz 2.5:(Stetigkeit in einem Punkt $x_0$)**
**Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass**

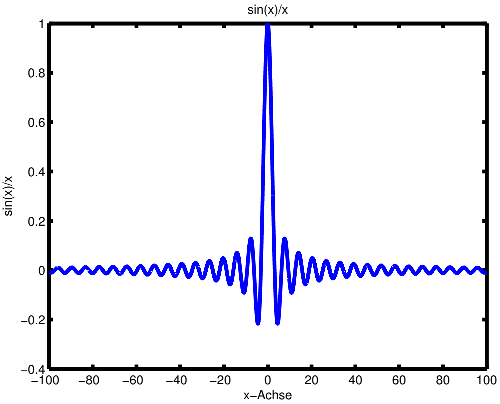
$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

**gilt, oder kürzer**

$$x \in U_\delta(x_0) \cap D \Longrightarrow f(x) \in U_\epsilon(f(x_0)).$$



# Buch Kap. 2.4 – Hebbare Unstetigkeit




**Hebbare Unstetigkeitsstelle der Funktion $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ bei $x = 0$. Diese Funktion kann stetig nach $x = 0$ fortgesetzt werden.**

# Buch Kap. 2.4 – Hebbare Unstetigkeit

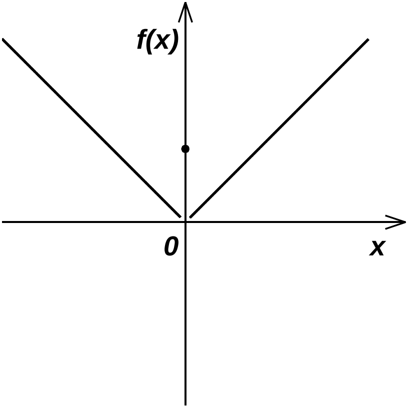



**Abbildung 2.23: Hebbare Unstetigkeitsstelle der Funktion**

$$f(x) := \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} \quad \text{bei } x = 0$$

# Buch Kap. 2.4 – Unstetigkeit 1. Art

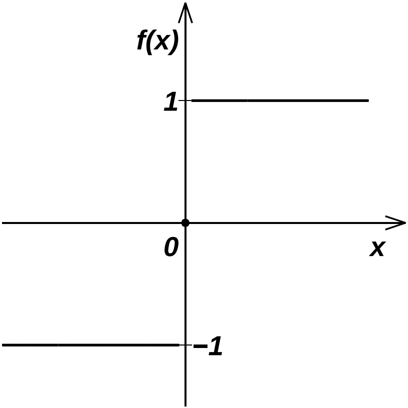



**Abbildung 2.24: Unstetigkeitsstelle 1. Art der Funktion**

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{bei } x = 0$$

# Buch Kap. 2.4 – Unstetigkeit 2ter Art

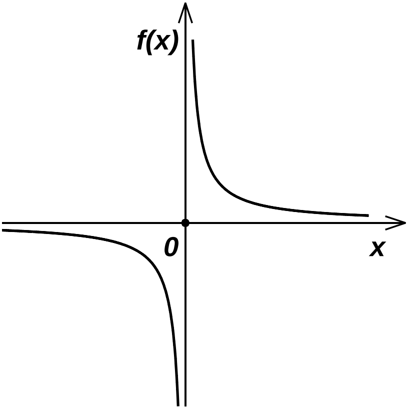



**Abbildung 2.25: Unstetigkeitsstelle 2. Art der Funktion**

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \textbf{bei } x = 0$$

# Buch Kap. 2.4 – Oszillatorische Unstetigkeit

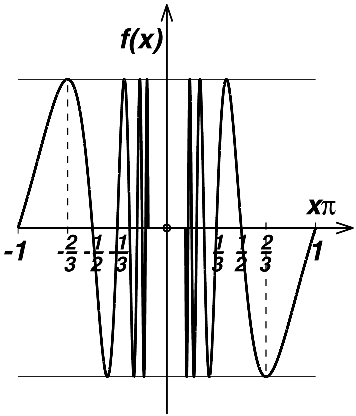



**Abbildung 2.26: Oszillatorische Unstetigkeit der Funktion**

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{bei } x = 0$$

# Buch Kap. 2.5 – Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 2.6: (Nullstellensatz) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen, d.h $f(a) \cdot f(b) < 0$, so besitzt $f$ in $(a, b)$ mindestens eine Nullstelle.**

**Nachweis von Satz 2.6 $\to$ Intervallschachtelung:**

1. $a_0 = a$, $b_0 = b$, $i = 0$ (Initialisierung)
2. Solange $|a_i - b_i| > 0$ führe aus
   - i) $m = \frac{a_i + b_i}{2}$
   - ii) Falls $f(m) \cdot f(a_i) < 0$: $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = m$
     falls $f(m) \cdot f(a_i) > 0$: $a_{i+1} = m$, $b_{i+1} = b_i$
     falls $f(m) = 0$: $m$ Nullstelle $\to$ STOP, gebe $m$ aus.
   - iii) $i = i + 1$
3. Ausgabe von $a_i$, $b_i$ und $m$.

# Buch Kap. 2.5 – Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 2.7: (Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\bar{y}$ eine beliebige Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es mindestens ein $\bar{x}$ zwischen $a$ und $b$ mit**

$$f(\bar{x}) = \bar{y},$$

**d.h. eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert $\bar{y}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.**

# Buch Kap. 2.5 – Rechenregeln für stetige Funktionen

**Sind $f$ und $g$ stetig im Punkt $x_0$, so sind auch**

$$f+g, \quad f-g, \quad f\cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \quad (\text{falls} \;\; g(x_0)\neq 0)$$

**stetig in $x_0$.**

# Buch Kap. 2.5 – Verkettung stetiger Funktionen

**Satz 2.8:(Verkettung stetiger Funktionen)**

- **Wenn $f : A \longrightarrow B$ in $x_0$ stetig ist, und $g : B \longrightarrow C$ in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die verkettete Funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x)) : A \longrightarrow C$ stetig in $x_0$.**
- **Elementare Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sind auf jedem Intervall $I \subset D$ stetig. Dabei bezeichnet $D$ den jeweiligen Definitionsbereich der elementaren Funktion, siehe Kap 2.3.**
- **Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion und $I$ ein Intervall, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}$ stetig auf $D = f(I)$.**

# Buch Kap. 2.5 – Maximum und Minimum

**Definition 2.19: (Maximum und Minimum)**

- **Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge. Die kleinste Zahl Zahl $s$ mit $s \geq a$ für alle $a \in A$ heißt Supremum von $A$, Notation $s = \sup_{a \in A} a$. Die größte Zahl $t$ mit $t \leq a$ für alle $a \in A$ heißt Infimum von $A$, Notation $s = \inf_{a \in A} a$.**
- **Gibt es $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x)$, so heißt $x_0$ Maximalstelle, $f(x_0)$ das Maximum von $f$. Gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$, so heißt $x_0$ Minimalstelle und $f(x_0)$ Minimum von $f$.**