Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Frau Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

11. Dezember 2007

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 2.5 – Maximum und Minimum

Definition 2.19: (Maximum und Minimum)

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge. Die kleinste Zahl Zahl s mit $s \geq a$ für alle $a \in A$ heißt Supremum von A, Notation $s = \sup_{a \in A} a$. Die größte Zahl t mit $t \leq a$ für alle $a \in A$ heißt Infimum von A, Notation $s = \inf_{a \in A} a$.
- Gibt es $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x)$, so heißt x_0 Maximalstelle, $f(x_0)$ das Maximum von f. Gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$, so heißt x_0 Minimalstelle und $f(x_0)$ Minimum von f.

Buch Kap. 2.5 – Satz von Weierstrß

Satz 2.9:(Weierstraß)

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und besitzt Maximum und Minimum, d.h. es existieren Elemente $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \; .$$

Jede stetige Funktion nimmt also auf einem abgeschlossenen Intervall Maximum und Minimum an.

Buch Kap. 2.6 – Differenzierbarkeit

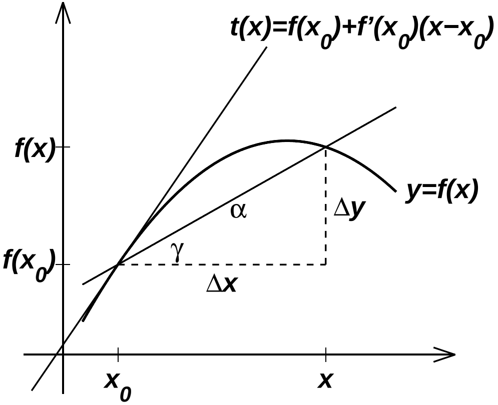

Abbildung 2.30: Sekante und Tangente an f in x_0

Buch Kap. 2.6 – Differenzierbarkeit von Funktionen

Definition 2.21: (Differenzierbarkeit)

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und I ein Intervall. f heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \textbf{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ (oder $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$) bezeichnet und <u>Ableitung</u> oder <u>Differentialquotient</u> von f in x_0 genannt.

Analog zur rechtsseitiger (linksseitiger) Stetigkeit werden rechtsseitige (linksseitige) Differenzierbarkeit in x_0 definiert; Ersetze in (1) dafür $x \longrightarrow x_0$ durch $x \longrightarrow x_0 + 0(-0)$ und $\Delta x \longrightarrow 0$ durch $\Delta x \longrightarrow 0 + 0(-0)$.

Buch Kap. 2.6 – Differenzierbarkeit von Funktionen

Definition 2.23, 2.26: (Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit auf $I \subset D$)

- **Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $I \subset D$ <u>differenzierbar</u>, wenn f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist, und in jedem zu I gehörigem Randpunkt einseitig differenzierbar ist.**
- **Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $I \subset D$ <u>stetig differenzierbar</u>, falls sie dort differenzierbar ist und die Ableitung $f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.**

Buch Kap. 2.6 – Differenzierbarkeit von Funktionen

Satz 2.10: (Differenzierbarkeit $\Longrightarrow$ Stetigkeit)

Ist eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierbar, so ist sie an der Stelle x_0 auch stetig.

Buch Kap. 2.6 – Differentiationsregeln

Seien f und g differenzierbare Funktionen. Die Ableitung einer Funktion f wird durch f' bezeichnet.

(i) **Ableitung von Summe, Produkt und Quotient**
$(f+g)' = f' + g'$
$(c \cdot f)' = cf'$ (c reelle Konstante)
$(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel)

(ii) **Kettenregel**
$(f \circ g(x))' = (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

(iii) **Ableitung der Umkehrfunktion**
Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, dann gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Buch Kap. 2.6 – Differentiationsregeln
Grundfunktionen

- $(x^\nu)' = \nu\, x^{\nu-1}$ $(\nu \in \mathbb{Z})$
- $(\sin x)' = \cos x\ ,\ (\cos x)' = -\sin x$
- $(e^x)' = e^x\ ,\ (a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0)$

Buch Kap. 2.6 – Höhere Ableitungen

Definition 2.24: (höhere Ableitungen)

- Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf $A \subseteq D$ und habe die Ableitung $g(x) = f'(x)$. Ist $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $B \subseteq A$ mit der Ableitung $g'(x) = (f'(x))'$, dann heißt f zweimal differenzierbar und
$$f^{(2)}(x) := g'(x) = (f'(x))'$$
heißt zweite Ableitung der Funktion f.
- Die Differenzierbarkeit der $(n-1)$-ten Ableitung vorausgesetzt, wird analog die n-te Ableitung von f durch
$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$
rekursiv definiert. Für $f^{(n)}(x)$ wird auch $\frac{d^n f}{d\, x^n}(x)$ geschrieben.
- Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig differenzierbar, falls $f^n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.