Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Analysis I im WiSe 2007/08

Folien Vorlesung 10

Taylorreihen

Taylorreihen/-polynome

$$\text{Probleme in den Anwendungen :}$$

$$\text{oft hohe Dimension, meist nichtpolynomial}$$

$$\Longrightarrow \text{ meist schwer /unmöglich exakt lösbar}$$

- FRAGE: Kann man das Problem zumindest **lokal** hinreichend gut durch ein polynomiales Model beschreiben?

- WOZU? Bei Polynomen meist einfacher : Nullstellen, Verlauf, Ableitungen, Integrale etc.

- WAS IST GUT? Im Mittel? Maximale Abweichung im vorgegebenem Bereich? Fläche zwischen Funktionsgraphen minimal? Oder $\cdots$

HIER : möglichst gut in einem Punkt x_0

GENAUER: zu f und einem festen Punkt suchen wir ein Polynom p , für das

$$f(x_0) = p(x_0)\,, \quad f'(x_0) = p'(x_0)\,, \quad f''(x_0) = p''(x_0)$$
$$\cdots\ f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$$

mit möglichst hohem n gilt.

Für uns ist x_0 der Nabel derWelt! Schreibe Polynom $m - ten$ Grades als:

$$p_m(x)\ = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_m(x - x_0)^m.$$

0-ter Versuch : Polynom nullten grades : $p_0(x) = a_0 \qquad a_0 = f(x_0)$

Weitere Forderungen : i.A. nicht erfüllbar!

Soll nicht nur der Funktionswert sondern auch die Steigung stimmen, braucht man noch einen Parameter

$p_1(x) := a_0 + a_1(x - x_0) \implies p_1'(x) = a_1 = f'(x_0)$

Also

$$\boxed{p_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

p_1 stimmt in x_0 mit f in Funktionwert und Steigung überein

Nächste Forderung $f''(x_0) = p''(x_0)$ i.A. mit linearen Polynomen nicht erfüllbar!

Sollen nicht nur der Funktionswert und Steigung sondern auch die zweite Ableitung stimmen, braucht man noch einen Parameter

$p_2(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$

Muss jetzt etwa $a_2 = f''(x_0)$ gelten? Probieren Sie es!

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$
$$\Longrightarrow p_n^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

Soll $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ gelten, so muss gelten:

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$$

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = T_n(x; x_0)$$

Satz:) Taylorsche Formel mit Lagrangescher Restgliedformel

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf I (n+1)-mal differenzierfunktion und $x, x_0 \in I$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\
+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)\,.
\end{aligned}
$$

Für das sogenannte **Restglied** R_n gilt (u.a. die Lagrangesche Darstellung)

$$
\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}
$$

wobei die (in der Regel unbekannte) **Zwischenstelle** θ zwischen x und x_0 liegt.

$$T_n(x;x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

heißt **Taylorpolynom** n-ten Grades zu f mit dem **Entwicklungspunkt** x_0.

BEWEIS: Für $x = x_0$ sind die Behauptungen sofort klar. Sei also $x \neq x_0$. Dann gibt es zu festem x sicher eine Konstante K mit

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) \,+\, &\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 \,+\, \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\
&+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \,+\, K(x-x_0)^{n+1}\,.
\end{aligned}
$$

Wir halten nun x fest und definieren

$$
\begin{aligned}
F(z) = f(z) \,+\, &\frac{f'(z)}{1!}(x-z)^1 \,+\, \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 \\
&+ \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n \,+\, K(x-z)^{n+1}\,.
\end{aligned}
$$

Es gilt $\qquad F(x) = f(x) = F(x_0).$

Rolle : $\exists\theta$ zwischen x und x_0 mit $F'(\theta) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}F(z) = F'(z) &= f'(z) + f'(z)(-1) + f''(z)(x-z)^1 \\ &+ \frac{f''(z)}{2!}(-2)(x-z)^1 + \frac{f^{(3)}(z)}{2!}(x-z)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(-n)(x-z)^{n-1} \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - K(n+1)(x-z)^n \,.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}0 = F'(\theta) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x-\theta)^n - K(n+1)(x-\theta)^n \\ &\Longrightarrow \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!} = K(n+1) \Longrightarrow K = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

BEISPIELE:

- Exponentialfunktion: $x_0 := 0$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} T_n(x;0) =& f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\ & = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ & = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Approximation : lokal gut. Fehlerabschätzung : wo??

Zum Beispiel für $x \in [-0.1,\, 0.1]$ und $n = 4$:

$$|R_n(x;0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{(0.1)^5}{5!} e^{\theta}$$

$$\leq \frac{(0.1)^5}{120} e^{0.1} \leq \frac{(0.1)^5}{120} e^{0.5} \leq \frac{(0.1)^5}{120} 4^{0.5} = \frac{10^{-5}}{60}$$

für $x \in [-1, 1]$ und $n = 4$:

$$|R_n(x;0)| \leq \frac{(1)^5}{120} e^1 \leq \frac{e}{120} \leq \frac{3}{120} = \frac{1}{40} = 0.025$$

Für festes x gilt

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x;0)| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = 0$$

Beweis ?

Das heißt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

oder

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

Taylorreihe von e^x um Null/mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

Definition: Taylorreihe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf I beliebig oft differenzierbare funktion und $x, x_0 \in I$. Dann heißt

$$T(x; x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

die Taylorreihe zu f mit Entwicklungspunkt x_0.

ACHTUNG : muss nicht konvergieren. Wenn konvergent, nicht notwendig gegen f. Genaueres : 2. Semester

- <u>Sinusreihe</u>, $x_0 := 0$,

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & \sin(x) & \Longrightarrow & f(x_0) & = & 0 \\
f'(x) & = & \cos(x) & \Longrightarrow & f'(x_0) & = & 1 \\
f''(x) & = & -\sin(x) & \Longrightarrow & f''(x_0) & = & 0 \\
f'''(x) & = & -\cos(x) & \Longrightarrow & f'''(x_0) & = & -1 \\
f^{(4)}(x) & = & \sin(x) & \Longrightarrow & f^{(4)}(x_0) & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl}
f^{4k}(x) & = & \sin(x) & \qquad & f^{(4k+2)}(x) & = & -\sin(x) \\
f^{4k+1}(x) & = & \cos(x) & & f^{(4k+3)}(x) & = & -\cos(x) \\
f^{2k}(0) & = & 0 & & f^{(2k+1)}(0) & = & (-1)^k
\end{array}$$

$$T(x;0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots$$

$$T_{2n+1}(x;0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = T_{2n+2}(x;0)$$

$$|\, R_{2n+1}(x;0) \,| = |\, R_{2n+2}(x;0) \,| = \left| \frac{f^{(2n+3)}(\alpha)}{(2n+3)!} (x-0)^{(2n+3)} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^{(2n+3)}}{(2n+3)!} \right|$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

BEISPIEL:

Polynom fünften Grades, $x_0 := 0$, $I = [-0.2,\ 0.2]$

$$T_5(x;0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$|R_5(x)| = |R_6(x)| = \left| \frac{f^{(7)}(\alpha)}{7!} x^7 \right| \leq \left| \frac{\cos(\alpha)}{7!} 0.2^7 \right|$$

$$\leq \frac{2^7}{7!\,10^7} = \frac{1}{7!\,5^7} < 4 \cdot 10^{-8}.$$

- Cosinusreihe, $x_0 := 0$, $I = [-0.2,\ 0.2]$

- <u>Binomische Reihe</u>,

Zur Erinnerung: $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$f^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)\,(1+x)^{n-k}$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

$$T_n(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Sei nun $a \in \mathbb{R}$ beliebig, also nicht unbedingt aus $\mathbb{N}$.

Wir definieren

$$\binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots (a-k+1)}{k!} \qquad k \in \mathbb{N} \qquad \binom{a}{0} = 1\,.$$

Dann erhält man völlig analog zum Fall $n \in \mathbb{N}$ für

$f(x) := (1+x)^a$ zum Entwicklungspukt $x_0 = 0$ die Taylorreihe

$$T(x;0) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k\,.$$

<u>BEISPIEL:</u> Berechnen Sie $T_2(x;0)$ für $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ und $x \in [-1,1]$. Schätzen Sie den Fehler ab.

Zur Erinnerung:

Definition: Extrema $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

f besitzt in $x_0 \in [a,b]$ ein **lokales Minimum**, wenn es eine $\epsilon-$ Umgebung U (hier $]x_0-\epsilon,\, x_0+\epsilon[$) von x_0 gibt, so dass

$$f(x_0) \le f(x) \qquad \forall\, x \in U \cap [a,b] \qquad (*)$$

gilt.

f besitzt in $x_0 \in [a,b]$ ein **lokales Maximum**, wenn

$$f(x_0) \ge f(x) \qquad \forall\, x \in U \cap [a,b] \qquad (**)$$

f besitzt in $x_0 \in [a,b]$ ein **striktes (echtes)** lokales Minimum bzw. Maximum, wenn in (*) bzw. (**) das $\le$ bzw. $\ge$ Zeichen durch $<$ bzw. $>$ ersetzt werden kann.

Gilt sogar

$$f(x_0) \ \leq (\text{ bzw. } \geq) \, f(x) \qquad \forall \, x \in [a,b]$$

so hat f in x_0 ein **globales (absolutes)** Minimum bzw. Maximum.

Extremalstelle/Extremum : Sammelbegriff für Minimum oder Maximum.

Weiter oben gezeigt: Ist f sei differenzierbar auf $I = [a,b]$, Dann gilt

- f konstant $\iff f'(x) = 0 \quad \forall \, x \in I$
- f (streng) monoton wachsend $\iff f'(x) \geq 0 \, (> 0) \quad \forall \, x \in I$
- f (streng) monoton fallend $\iff f'(x) \leq 0 \, (< 0) \quad \forall \, x \in I$

Da f unmittelbar vor einem Minimum fallen und nach einem Minimum steigen muss, bzw. vor einem Maximum steigen und nach einem Maximum fallen muss, folgt:

<u>Satz: Notwendiges Kriterium für Extrema</u>

Liegt in x_0 ein Extremum einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vor, so gilt

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \qquad \text{oder } x_0 \text{ Randpunkt.}}$$

ACHTUNG: notwendiges aber nicht hinreichendes Kriterium. Beispiel?

Satz: hinreichendes Kriterium für Extrema

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf [a,b] und $f'(x_0) = 0$. Dann gilt

- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow$ in x_0 lok. Minimum
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow$ in x_0 lok. Maximum

ACHTUNG: $f''(x_0) > 0$ kein notwendiges Kriterium. Beispiel?

Beweis:

Ist $f''(x_0)$ positiv, so auch in einer Umgebung von x_0. Nach Taylor gilt mit $\alpha =$ Zwischenstelle:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(\alpha)}{2!}\,(x - x_0)^2\,.$$

Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(\alpha)}{2!}\,(x - x_0)^2\,.$$

Also nahe genug an x_0

$$f(x) - f(x_0) > 0.$$

BEMERKUNGEN:

- Ist $f''(x_0) = 0$ und f dreimal stet. diffb., so folgt analog:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x - x_0)^3 \qquad \alpha \in [a, b]\,.$$

Verschwindet die dritte Ableitung in x_0 nicht, so tut sie es auch in einer Umgebung von x_0 nicht, und es liegt ein Sattelpunkt (**horizontaler Wendepunkt**) vor.

Definition: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in (a,b). Dann heißt f **konvex (konkav)**, wenn

$$\forall x \in (a, b) : \quad f''(x) \geq (\leq)\, 0$$

gilt. (**Rechts-linkskurve bzw. Links-Rechtskurve**)

- Ist $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ und f vier mal stet. diffb., so

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!}(x - x_0)^4 \qquad \alpha \in [a, b]\,.$$

$f^{(4)}(x_0) > 0 \Longrightarrow$ Minimum, $f^{(4)}(x_0) < 0 \Longrightarrow$ Maximum.

- Analog folgt für hinreichend oft stetig diff.bare Funktionen:

  Ist die erste nichtverschwindende Ableitung von gerader Ordnung: Min/Max

  Ist die erste nichtverschwindende Ableitung von ungerader Ordnung: Sattel

- Globale Extrema:

  Bestimme alle Kandidaten für lokale Extrema ($f' = 0$).

  Vergleiche Funktionswerte der Kandidaten + Randpunkte.

  Existenz gesichert falls Intervall beschränkt und abgeschlossen.

Kurvendiskussion

- Definitionsbereich
- asymptotisches Verhalten ($x \to \pm\infty$), Pole etc.
- Nullstellen
- Extrema, Monotonie
- Krümmungsverhalten (konvexität/Konkavität)
- Symmetrien
- Bildbereich
- Evtl. Skizze

Beispiel: $f(x) = \dfrac{(x+1)^4}{(x^2-1)^2}$

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, für $x = -1$ liegt eine hebbare Singularität vor. Es gilt

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \qquad \forall x \in D \cdot$$

- asymptotisches Verhalten ($x \to \pm\infty$), Pole etc.

  Grenzwertverhalten in den Definitionslücken

  $x_1 = -1$ bzw. $x_2 = 1$:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = 0 \qquad \text{stetig ergänzbar}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = +\infty \cdot \qquad \text{Pol ohne Vorzeichenwechsel}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^2 = 1.$$

- Symmetrie: zunächst keine erkennbar.

- Nullstellen: keine, da $x = -1$ nicht zum Definitionsbereich von f gehört.

- Extrema und Monotonie:

Für die erste Ableitung von f gilt:

$$f'(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\right) = -4\frac{x+1}{(x-1)^3}.$$

Einzige Nullstelle: $x = -1 \notin D \implies$ keine Extrema

Monotonieverhalten kann sich nur bei Überschreiten der Definitionslücken in $x = \pm 1$ ändern Es gelten folgende Ungleichungen:

$$x+1 \begin{cases} < 0 & \text{für } x < -1 \\ > 0 & \text{für } -1 < x \end{cases} \qquad \text{und} \qquad (x-1)^3 \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 1 \\ > 0 & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < -1 & \Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend} \\ > 0 & \text{für } -1 < x < 1 & \Rightarrow f \text{ ist streng monoton steigend} \\ < 0 & \text{für } 1 < x & \Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend} \end{cases}$$

- Wendepunkte und Konvexität:

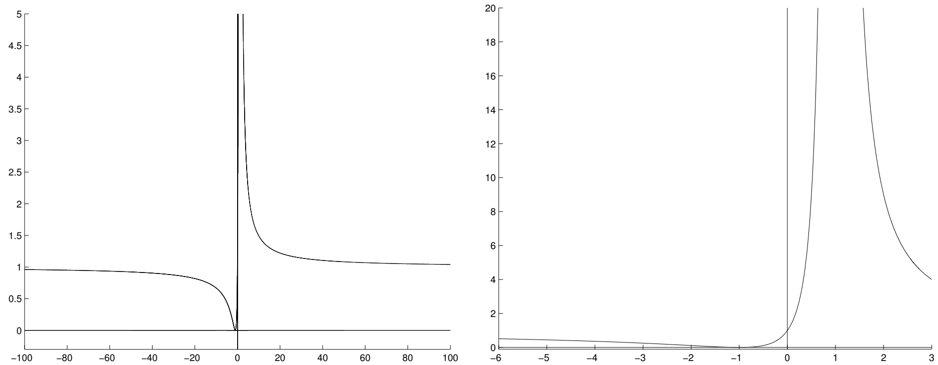
$$f''(x) = -4\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6}$$

$$= -4\frac{(x-1) - 3(x+1)}{(x-1)^4} \; = \; 4\frac{(2x+4)}{(x-1)^4}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < -2 \quad \Rightarrow f \text{ ist streng konkav} \\ = 0 & \text{für } x = -2 \\ > 0 & \text{für } x > -2 \quad \Rightarrow f \text{ ist streng konvex} \end{cases}$$

Damit ist $x_3 = -2$ Wendepunkt (Rechts-linkskurve)

- Es ergibt sich folgendes Bild:



- Bildbereich: $]0, \infty[$