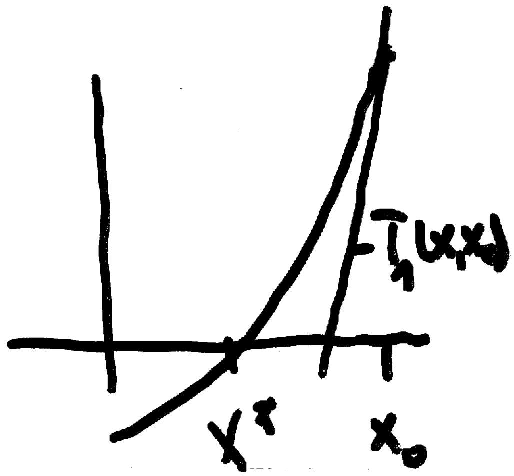
050208

Bemerkungen zum Newton-Verfahren

x_0 geg.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Probleme

i.) $f'(x_n) \neq 0$ ist für Durchführbarkeit notwendig

ii) Nur "lokale Konvergenz", d.h. x_0 muß in der Nähe von x^* gewählt werden.

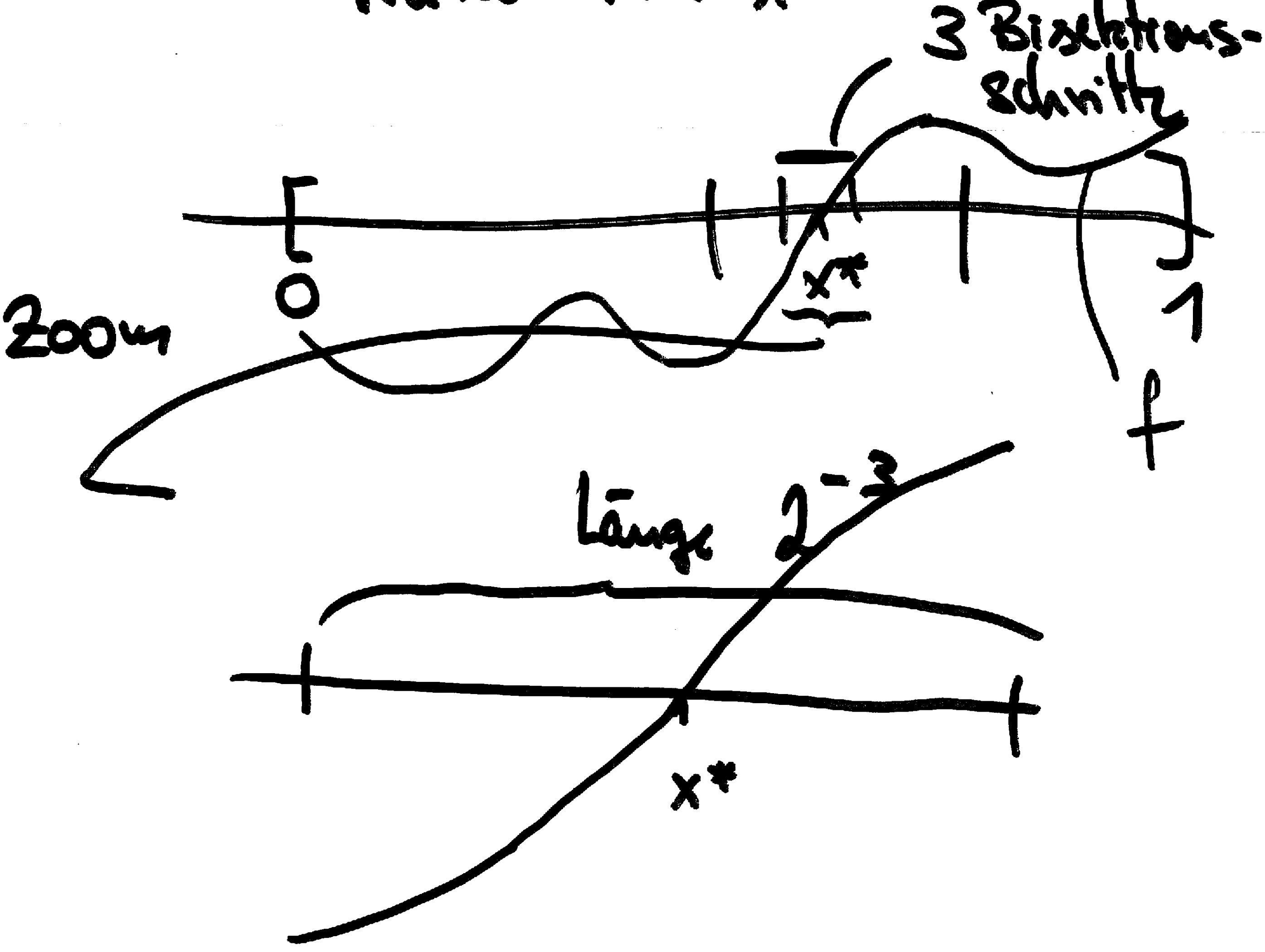
Abhilfe: Kombinieren Bisektion und Newton-Verfahren

Bisektion $\longrightarrow$ $[a,b] \ni x^*$, $b-a$ klein

Newton in $[a,b]$ starten

Idee: i) Robustes Verfahren zur Eingrenzung von x^*

ii) Schnelles Verfahren in der Nähe von x^*



Stichwort "Globalisierung" bei numerischen Verfahren

Vorteil Newton Verfahren:

- schnelle, i.d.R. quadratische lokale Konvergenz, d.h.

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C_1 |x_n - x^*|^2$$

mit einer Konstanten $C_1 > 0$

<u>Nachweis</u>: f 2x stetig diffbar mit $f(x^*) = 0$

Taylorentwicklung liefert $(\xi \in (x^*, x_n))$

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_n)^2$$

Damit

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x^* - x_n + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

Beachte: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$\longrightarrow \quad x_{n+1} - x_n = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Damit

$$x_{n+1} - x_n = x^* - x_n + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} (x^* - x_n)^2$$

Also

$$|x_{n+1} - x^*| = \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} (x^* - x_n)^2 \right|$$

$$\leq \underbrace{\max_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{2f'(x)} \right|}_{=: C} |x^* - x_n|^2$$

Modellierung

Bsp: Meßdaten $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$
an Orten $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

Ziel: Konstruktion eines "kontinuierlichen" Datenmodells p

Forderung: $p(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

Ansatz: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
Polynom n-ten Grades

Aufgabe: Bestimme $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$
aus $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ <u>und</u>
aus $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$

Forderung liefert

$$f_i = p(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n$$
$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Lineares Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{c}n+1\\ \text{Zeilen}\end{array}\right\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}}_{n+1 \text{ Spalten}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Vandermond-Matrix regulär, d.h. Inverse existiert, falls

$x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$

In diesem Fall sind $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ eindeutig bestimmt, d.h. unser Datenmodell "existiert"

Geschickterer Ansatz für p:

$$p(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ \dots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

Damit

$$f_0 = p(x_0) = b_0$$

$$f_1 = p(x_1) = b_0 + b_1(x_1-x_0), \text{ also}$$
$$b_1 = \frac{f_1-b_0}{x_1-x_0} = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

$$f_2 = p(x_2) = \underline{b_0} + \underline{b_1}(x_2-x_0) + b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$
$$\Rightarrow \quad b_2 = \ldots$$

$$\vdots$$

$$f_n = p(x_n) = \underline{b_0} + \underline{b_1}(x_n-x_0) + \underline{b_2}(x_n-x_0)(x_n-x_1)$$
$$+ \dots + b_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})$$
$$\Rightarrow \quad b_n = \ldots$$

Hier: Lösung eines gestaffelten Gleichungssystems.

Immer möglich, falls $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$