Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/09**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt: $1 - |2 - |x|| \geq 0$.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-5, 5] \to [-2, 2]$, $f_1(x) = 1 - |2 - |x||$,

(ii) $f_2 : [0, 1] \to [0, 2]$, $f_2(x) = x^4$,

(iii) $f_3 : [0, \pi/2] \to [0, 1/2]$, $f_3(x) = \sin x \cos x$,

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $f_4(x) = e^x$.

c) Eine Funktion heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt, bzw. *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):

(i) $f_5(x) = \cos x + 2^x + 2^{-x}$,

(ii) $f_6(x) = x^3 + \sin(2x)$.

Aufgabe 6:

Man beweise durch vollständige Induktion

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$,

c) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(1 + x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_j \geq 0$.

Aufgabe 7:

a) Man entscheide und begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners, welche der beiden Zahlen $\sqrt{7} + \sqrt{11}$ und $\sqrt{8} + \sqrt{10}$ größer ist.

b) Zur Berechnung von

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)$$

finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

Aufgabe 8:

a) Man bestimme für die Zahlen 3185 und 126 den ggT und das kgV.

b) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:

(i) $$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1},$$

(ii) $$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}.$$

Abgabetermin: 24.11. - 28.11.08 (zu Beginn der Übung)