Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/09**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \frac{n^3+1}{n^2+5n} - \frac{n^4+4}{n^3+2n^2}\,, \qquad b_n = \ln\left(\frac{5n}{n+1}\right)\,,$$

$$c_n = \left(\frac{2}{n}-1\right)^n\,, \qquad d_n = \frac{(2-2i)^n}{(1+3i)^n}\,,$$

$$e_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}\,, \qquad f_n = \frac{1+2^n+3^{n+1}+4^{n+2}+5^{n+3}}{5^{n+1}}\,.$$

Aufgabe 10:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 0\,, \quad a_{n+1} = \dfrac{3-a_n}{2}\,,$

b) $b_1 = \dfrac{1}{2},\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2+3}{4}$

c) $c_1 = 5,\ c_{n+1} = \dfrac{7}{4-c_n}$

d) $d_1 = 3,\ d_{n+1} = \sqrt{2+d_n}$

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2 - x) ,$$

sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \leq 0$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 .$$

Aufgabe 12:

Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = b\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}\,(16x_n - 5x_{n-1})$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{15\,(1 - 15^{n-1})\,a + 3\,(15^n - 1)\,b}{14 \cdot 3^n} .$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Abgabetermin: 8.12. - 12.12.08 (zu Beginn der Übung)