Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/09**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

a) $$\boldsymbol{x}^n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \frac{2n^2 + (-1)^n (n+1)^2}{n^2} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

b) $$\boldsymbol{x}^n = \left(\frac{4n}{5^n}, \quad \frac{(2n+1)^2}{(n+1)(n+2)}, \quad \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

c) $$\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_n \sin y_n \\ \frac{1}{3} y_n \cos z_n \\ \frac{1}{4} z_n \sin x_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2},$$

b) $$2 + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} + \frac{16}{125} + \frac{32}{625} + \cdots,$$

c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{2^k},$$

d) $$\frac{4}{6} + \frac{8}{11} + \frac{12}{16} + \frac{16}{21} + \frac{20}{26} + \cdots,$$

e) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right).$$

Aufgabe 15:

a) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1}$$

alterniert und dass für $b_n := \dfrac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

b) Warum konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right) ?$$

Ab welchem Index N unterscheiden sich die Partialsummen s_N vom Grenzwert der Reihe um weniger als 0.003?

Aufgabe 16:

a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$D_1 = [0,1] \cup \left\{ \frac{2n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \quad , \quad D_2 = \,]0,\infty[\,,$$
$$D_3 = [1,2] \cup \left\{ \frac{3n+1}{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \quad , \quad D_4 = [0,1] \times \,]0,1[\,.$$

Man gebe für jede Menge die Menge ihrer Häufungspunkte bzw. inneren Punkte an, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie (ggf. uneigentlich) existieren:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4+x^2}{2+x}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3}$.

c) Man zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

nicht existiert und berechne alle Häufungspunkte.

Abgabetermin: 5.1. - 9.1.09 (zu Beginn der Übung)