Aufgabe 1:

a) Man berechne $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{4n^2+3}}{n}$.

b) Man untersuche die rekursiv gegebene Folge

$$b_1 = 0\,, \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{5} + 1\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

c) Man untersuche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ auf Konvergenz.

d) Man bestimme eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f(2) = 5$ und

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ -1 & \text{für} \quad -1 < x < 1\,, \\ 2x & \text{für} \quad 1 < x < \infty\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \sinh(x)\sin(x)$$

definierte Funktion.

a) Zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ berechne man das Taylor-Polynom $T_2(x; x_0)$ von f.

b) Als Näherungswert für $f(1)$ bestimme man den Wert des Taylor-Polynoms $T_2(1; 0)$.

c) Man gebe eine obere Schranke für den Fehler $|f(1) - T_2\,(1; 0)|$ an.

d) Man überprüfe f auf Symmetrie.

e) Man berechne im Intervall $[-4, 4]$ alle Nullstellen von f.

f) Man untersuche das Krümmungsverhalten von f im Intervall $[-4, 4]$.

g) Man bestimme im Intervall $[-4, 4]$ alle Wendepunkte von f.