Aufgabe 1:

a) Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion, dass

$$a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$$

durch 9 teilbar ist.

b) Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}$.

c) Man untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k2^k}$ auf Konvergenz.

d) Man berechne eine für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & 1 & , \\ f'(x) & = & x & \text{für} \quad -\infty < x < -2\,, \\ f'(x) & = & 1 & \text{für} \quad -2 < x < 1\,, \\ f'(x) & = & -2x & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{array}$$

und zeichne die Funktion.

Aufgabe 2:

a) Man bestimme für die Menge

$$M = \{0\} \cup [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

die Menge aller Häufungspunkte M' und aller inneren Punkte M^0.

b) Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sinh x}{x - \sin x}$.

c) Für die durch $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2+2}$ gegebene Funktion berechne man zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ das Taylor-Polynom 2.Grades.

d) Für die durch $g(x) = (x-1)^2\sqrt{x}$ gegebene Funktion gebe man im Definitionsbereich das Monotonieverhalten an und bestimme und klassifiziere alle Extremwerte.