## 3.1. Normierte Vektorräume

**Definition:**

Sei $V$ ein Vektorraum (oder linearer Raum) über (dem Körper) $\mathbb{R}$.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ heißt Norm auf $V$, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

N1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (Definitheit).

N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (Homogenität).

N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

$V$ zusammen mit $\|\cdot\|$ heißt dann normierter Vektorraum.



# Beispiele für normierte Vektorräume.

- $\mathbb{R}$ mit der Betragsfunktion $|\cdot|$ ist ein normierter Vektorraum.
- Für $n \geq 1$ ist der $\mathbb{R}^n$, zusammen mit der $p$–Norm, $p \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

  ein normierter Vektorraum.

**Spezialfall:** Für $p = 2$ bekommt man die Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

**Weiterhin** ($p = \infty$): Die Maximumnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

## 3.2. Folgen

**Definition:** Sei $V$ ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Eine Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to V$, $n \mapsto a_n$, kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$.

**Beispiele für Folgen.**

- Reelle Folgen (Folgen reeller Zahlen), d.h. $V = \mathbb{R}$, z.B. ist
$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
eine reelle Folge.
- Komplexe Folgen (Folgen komplexer Zahlen), d.h. $V = \mathbb{C}$, z.B. ist
$$a_n = i^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
eine komplexe Folge.





**Weitere Beispiele für Folgen.**

- Vektorenfolgen (Folgen von Vektoren), d.h. $V = \mathbb{R}^d$ oder $V = \mathbb{C}^d$, z.B. ist
$$a_n = \left(\frac{1}{n}, n, \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } d = 3$$
eine Folge reeller Vektoren.
- Funktionenfolgen (Folgen von Funktionen), etwa $V = \mathcal{C}[a,b]$, z.B. ist für $[a,b] = [0,1]$ die Folge
$$f_n(x) = x^n \quad \text{für } x \in [0,1] \text{ und } n \in \mathbb{N}$$
eine Funktionenfolge.

**Bemerkung:** Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}[a,b]$ die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

**Rechenoperationen mit Folgen.**

Die Menge aller Folgen in $V$ bildet einen Vektorraum $V^{\mathbb{N}}$, für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

**Rekursion und Iteration.**

Folgen lassen sich rekursiv beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \to V$$

eine bestimmte Iterationsvorschrift bezeichnet.



## Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Voraussetzung:** $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- **Iteration:** Definiere zwei Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv mit den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und der Iterationsvorschrift.

FOR $n = 1, 2, \ldots$

$x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2;$

IF $f(x) = 0$ THEN RETURN

IF $(f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0)$ THEN

$u_n := x; \quad v_n := v_{n-1};$

ELSE

$u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x;$

**OUTPUT:** $x$ mit $f(x) = 0$, Nullstelle von $f$ in $[a, b]$.

## Beispiel zum Bisektionsverfahren.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ auf dem Intervall $[1, 2]$.
Die gesuchte Nullstelle liegt bei $x = \sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$

| $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.0000 00000 | 2.0000 00000 |
| 1 | 1.0000 00000 | 1.5000 00000 |
| 2 | 1.2500 00000 | 1.5000 00000 |
| 3 | 1.3750 00000 | 1.5000 00000 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 10 | 1.4140 62500 | 1.4150 39063 |
| 20 | 1.4142 13181 | 1.4142 14134 |
| 30 | 1.4142 13562 | 1.4142 13562 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

**Beobachtung:** Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!



## Das Newton–Verfahren.

**Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

**Verwende** die Newton–Iteration:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für } f'(x_n) \neq 0$$

mit Startwert $x_0$.

Das Verfahren *konvergiert*, falls $x_0$ nahe bei einer Nullstelle von f liegt.

**Beispiel:** Für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 1$ erhält man

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 1.0000 | 1.5000 | 1.41667 | 1.4142 15686 | 1.4142 13562 | ... |

**Erinnerung:** $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von $f$.

# Konvergenz von Folgen.

**Definition:**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum $V$. Dann heißt

- $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ für $n_j \in \mathbb{N}$ mit $1 \le n_1 < n_2 < \ldots$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, falls es ein $C > 0$ gibt mit
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \|a_n\| \le C$$
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert (Limes) $a \in V$, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \ge N \;:\; \|a_n - a\| < \varepsilon$$
Eine nicht–konvergente Folge heißt divergent.
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n, m \ge N \;:\; \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$



# Konvergenz von Folgen.

**Satz:** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

a) $(a_n)$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_n)$ beschränkt;
b) $(a_n)$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_n)$ Cauchy–Folge;
c) Falls $(a_n)$ konvergiert, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

**Beweis von a):** Sei $(a_n)$ konvergent mit Grenzwert $a$. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \le \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \quad \text{für alle } n \ge N(\varepsilon)$$

Damit ist die Folge $(a_n)$ beschränkt mit der Konstanten

$$C := \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}$$

Also
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \|a_n\| \le C$$

## Konvergenz von Folgen.

**Beweis von b):** Sei $(a_n)$ konvergent mit Grenzwert $a$. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$.

**Beweis von c):** Sei $(a_n)$ konvergent mit verschiedenen Grenzwerten $a$ und $\bar{a}$, $a \neq \bar{a}$. Dann gelten für $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|a_n - a\| &< \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \\ \|a_n - \bar{a}\| &< \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \overline{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Somit folgt für $n \geq \max\{N(\varepsilon), \overline{N}\varepsilon)\}$ die Ungleichung

$$\|a - \bar{a}\| = \|a - a_n + a_n - \bar{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \bar{a}\| < 2\varepsilon$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a = \bar{a}$ im Widerspruch zu $a \neq \bar{a}$.



## Bemerkungen zur Konvergenz von Folgen.

**Notation:** Für eine konvergente Folge $(a_n)$ mit Grenzwert schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \ \ (n \to \infty)$$

**Uneigentliche Konvergenz ...**

**...bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert** $\pm\infty$.

Für reelle Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : \ a_n > C$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : \ a_n < -C$$

# Vollständige Räume bzw. Banachräume, Hilberträume.

**Bemerkung.**
Die Umkehrung der Aussage im Satz, Teil b),

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \quad \Longrightarrow \quad (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in *gewissen* normierten Räumen, nämlich in

vollständigen Räumen bzw. Banachräumen.

Einen vollständigen *Euklidischen Vektorraum* nennt man auch

Hilbertraum.

Beispiele:

- für vollständige Räume: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$;
- für einen nicht vollständigen Raum: $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2)$.



# Rechnen mit konvergenten Folgen.

**Satz:** Seien $(a_n)$ und $(b_n)$ zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen $(a_n + b_n)$ und $(\lambda a_n)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$), wobei gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

**Beweis:** Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

a) Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

b) Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial.

# Die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge.

**Definition:** Sei $(a_n)$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a$.

a) Die Folge $(a_n)$ heißt (mindestens) linear konvergent, falls eine Konstante $0 < C < 1$ und ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\forall\, n \geq N: \;\; \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|$$

b) Die Folge $(a_n)$ heißt (mindestens) superlinear konvergent, falls es eine nicht–negative Nullfolge $C_n \geq 0$ mit $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ gibt, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \;\; \|a_{n+1} - a\| \leq C_n\|a_n - a\|$$

c) Die Folge $(a_n)$ heißt konvergent mit der Ordnung (mindestens) $p > 1$, falls es eine nicht–negative Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \;\; \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|^p$$



# Kapitel 3. Konvergenz von Folgen und Reihen

## 3.3. Konvergenzkriterien für reelle Folgen

**Definition:** Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

$$\text{monoton wachsend} \iff \forall\, n < m: \; a_n \leq a_m$$

$$\text{streng monoton wachsend} \iff \forall\, n < m: \; a_n < a_m$$

$$\text{nach oben beschränkt} \iff \exists\, C \in \mathbb{R}: \; \forall n: \; a_n \leq C$$

Analog definiert man die Begriffe

$$\text{monoton fallend} \iff \forall\, n < m: \; a_n \geq a_m$$

$$\text{streng monoton fallend} \iff \forall\, n < m: \; a_n > a_m$$

$$\text{nach unten beschränkt} \iff \exists\, C \in \mathbb{R}: \; \forall n: \; a_n \geq C$$