3.3 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Satz: Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall\, n \geq N$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon)$$

Folgerung: Prinzip der Intervallschachtelung.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Folge mit

$$a_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{(Intervallschachtelung)}$$

Dann sind beide Folgen konvergent. Gilt weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| \qquad |b_n - \xi| \leq |b_n - a_n|$$

Beispiel: Prinzip der Intervallschachtelung.

Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) *rekursiv* durch

$$a_0 := a \qquad b_0 := b$$

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden eine *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\operatorname{agm}(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

heißt arithmetisch–geometrisches Mittel von a und b.

Bernoullische Ungleichung und die geometrische Folge.

Es gilt

$$\forall\, x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}:\ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

wobei Gleichheit nur bei $n = 1$ oder $x = 0$ gilt.

Die Geometrische Folge.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relle Folge mit $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl}
q > 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1)) \\
q = 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\
0 < q < 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \left(q^n = \frac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \frac{1}{1+n(1/q-1)}\right) \\
-1 < q \leq 0 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n) \\
q = -1 & : & (q^n) \quad \text{beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\}) \\
q < -1 & : & (q^n) \quad \text{divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}
\end{array}$$

Weitere Rechenregeln für konvergente Folgen.

Satz: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen. Dann gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

b) $\forall\, n\ :\ b_n \neq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

c) $\forall\, n\ :\ a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

Beweis zu a): Für hinreichend große n gilt

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n|\cdot|b_n - b| + |b|\cdot|a_n - a| \\
&\leq C_a\cdot|b_n - b| + |b|\cdot|a_n - a| < (C_a + |b|)\varepsilon
\end{aligned}$$

Für b) und c) siehe Textbuch von Ansorge/Oberle.

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n$$

Es gilt

$$(n^2 + 5n + 1) - n^2 = \left(\sqrt{n^2 + 5n + 1} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n\right)$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2 + 5n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}} + 1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5 + 0}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}$$

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

Kapitalverzinsung: Anfangskapital K_0, Jahreszinssatz p

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_0(1+p) && \text{jährlich}\\
K_2 &= K_0\left(1+\frac{p}{2}\right)^2 && \text{halbjährlich}\\
K_4 &= K_0\left(1+\frac{p}{4}\right)^4 && \text{vierteljährlich}\\
K_{10} &= K_0\left(1+\frac{p}{10}\right)^{10} && \text{monatlich}\\
K_{360} &= K_0\left(1+\frac{p}{360}\right)^{360} && \text{täglich}
\end{aligned}$$

Untersuche die Konvergenz der Folge (a_n), also

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad ?$$

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Für $p > 0$ zeigt man, dass

a) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

b) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist,

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \le 4^l \quad (\text{wobei } l \in \mathbb{N} \text{ mit } l \ge p)$$

Damit konvergiert die Folge und für den Grenzwert erhält man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^p$$

Die Grenzwertformel gilt auch für negative p und als Spezialfall erhalten wir die Eulersche Zahl,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182\,81828\,\ldots$$

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Der Vektorraum $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Zur Erinnerung:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt

- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall\, n, m \geq N : \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

Für den Beweis des Cauchyschen Konvergenzkriteriums benötigen wir

a) das Prinzip der Häufungspunkte von Folgen,
b) den Satz von Bolzano und Weierstraß.

Häufungspunkte und Satz von Bolzano und Weierstraß.

Definition:
Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann wird der Grenzwert der Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ als Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Beispiel: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die komplexe Folge mit $a_n = i^n$. Dann besitzt (a_n) die vier Häufungspunkte $\{i, -i, 1, -1\}$.

Satz: (Satz von Bolzano und Weierstraß)
Jede reelle beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweisidee:
Verknüpfe das Bisektionsverfahren mit einer Intervallschachtelung:
Ist die Folge (a_n) beschränkt, so liegen alle Folgenglieder in einem endlichen Intervall $[A, B]$ und man kann rekursiv Teilintervalle $[A_k, B_k]$ definieren mit $A_k \nearrow$ und $B_k \searrow$.

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Der Vektorraum $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Beweis: Zeige, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist: für n und $N = N(\varepsilon)$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \le |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ. Dann gilt für $m, n_k \ge N(\varepsilon/2)$

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\le \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Notation:
$\liminf a_n$ = kleinster Häufungspunkt, $\limsup a_n$ = größter Häufungspunkt

Kapitel 3. Konvergenz von Folgen und Reihen

3.4. Konvergenz in normierten Vektorräumen

Im letzten Abschnitt 3.3. haben wir uns mit Konvergenzkriterien für reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschäftigt.

Sei nun $(V, \|\cdot\|)$ wieder allgemein ein normierter Vektorraum.

Wiederholung aus Abschnitt 3.2:

Definition:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt

- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert (Limes) $a \in V$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \ge N \;:\; \|a_n - a\| < \varepsilon$$

Beispiel:
Betrachte den Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.