Kapitel 5. Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

5.2. Die Regeln von de l'Hospital

Ausgangsfrage: Wie berechnet man den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

falls

1. beide Funktionen gegen Null konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

2. beide Funktionen gegen Unendlich konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Die erste Regel von de l'Hospital.

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und es gelte $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem zweiten Mittelwertsatzes gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

für einen Punkt ξ mit $|\xi - x_0| < |x - x_0|$.

Konvergiert nun x gegen x_0, so konvergiert auch ξ gegen x_0, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Weitere Regeln von de l'Hospital.

1. Für einseitige Grenzwerte gilt

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Falls die rechte Seite gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, d.h. es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$$

so gilt mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$$

3. Wir betrachten nun uneigentliche Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

De l'Hospital für uneigentliche Grenzwerte.

Satz: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der jeweilige Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit de l'Hospital und der Substitution $y = 1/x$ folgt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)}$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die zweite Regel von de l'Hospital.

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$, und es gelte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

sowie $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beispiel: Betrachte die `sinc-Funktion` $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ bei Null:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Weitere Beispiele zur Regel von de l'Hospital.

Beispiel:

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

5.3. Kurvendiskussion

Ziel: Feststellung des qualitativen und quantitativen Verhaltens einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ mit Skizze des Graphen von f.

Dabei sollen (mindestens) folgende Punkte untersucht werden.

1. Definitionsbereich
2. Symmetrien
3. Pole (Singularitäten)
4. Asymptotisches Verhalten (Verhalten im Unendlichen)
5. Nullstellenbestimmung
6. Bestimmung der (lokalen) Extrema (inkl. Monotoniebereiche)
7. Wendepunkte (inkl. Konvexität und Konkavität)
8. Skizze des Graphen

Erklärungen zur Kurvendiskussion.

Im Folgenden bezeichne $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion.

- f ist symmetrisch zur y–Achse (bzw. f ist eine gerade Funktion), falls

$$f(-x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

- f ist symmetrisch zum Ursprung (bzw. f ist eine ungerade Funktion), falls

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

- f besitzt einen (algebraischen) Pol in $x_0 \in D$, falls

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ (Ordnung des Pols) und g stetig in x_0 mit $g(x_0) \neq 0$.

k ungerade $\Rightarrow$ Pol mit Vorzeichenwechsel.

k gerade $\Rightarrow$ Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Weitere Erklärungen zur Kurvendiskussion.

- Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt Asymptote von f für $x \to \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

- Die Koeffizienten einer Asymptoten ergeben sich durch

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \beta = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

- Monotoniebereiche. Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f (streng) monoton wachsend bzw. (streng) monoton fallend ist.
- Konvexität und Konkavität. Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f konvex bzw. konkav ist.

Beispiel zur Kurvendiskussion I.

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$$

1. Definitionsbereich. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

In $x_0 = 0$ ist f nicht stetig ergänzbar, denn $\lim\limits_{x \to 0}(2x^2 + 3x - 4) = -4 \neq 0$.

2. Symmetrien. keine, f ist weder gerade noch ungerade.

3. Pole: $x_0 = 0$ ist ein Pol ohne Vorzeichenwechsel, $\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) = -\infty$.

4. Asmptotik. Es gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2} = 2$$

und somit ist $y = 2$ eine horizontale Asymptote.

Beispiel zur Kurvendiskussion II.

5. Nullstellen. Es gilt

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 4 = 0$$

Somit sind $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{41})$ die beiden (einzigen) Nullstellen von f.

6. Lokale Extrema. Es gilt

$$f'(x) = \frac{-3x+8}{x^3}$$

sowie

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 \quad \text{(streng monoton fallend)} \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} \quad \text{(streng monoton wachsend)} \\ < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty \quad \text{(streng monoton fallend)} \end{cases}$$

Bei $x = \frac{8}{3}$ liegt also ein stationärer Punkt vor und gleichzeitig (wegen der Monotonie) ein strenges lokales Maximum. Alternative zur Monotonie:

$$f''(x) = \frac{6x-24}{x^4} \quad \Longrightarrow \quad f''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{27}{64} < 0.$$

Beispiel zur Kurvendiskussion III.

7. Wendepunkte. Es gilt

$$f''(x) = \frac{6x-24}{x^4} \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x) = \frac{96-18x}{x^5}$$

Somit gilt $f''(x) = 0$ für $x = 4$ mit $f(4) = \frac{5}{2}$. Weiter ist $f^{(3)} = \frac{3}{128} > 0$. Daher liegt bei $x = 4$ ein Wendepunkt mit Rechts–Linkskurve vor. Zudem gilt

$$f''(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 \quad \text{(streng konkav)} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < 4 \quad \text{(streng konkav)} \\ > 0 & \text{für } 4 < x < \infty \quad \text{(streng konvex)} \end{cases}$$

8. Skizze.

5.4. Fixpunkt–Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt–Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0, sodass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Phi(x^*)$$

Grundidee der Fixpunkt–Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mit der Fixpunkt–Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aber: Verfahrensfunktion Φ ist nicht eindeutig!

Beispiel: Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

1. Iteration

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\tan x =: \Phi_1(x)$$

2. Iteration

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt–Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan x_k \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms.

Bemerkung: Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Lipschitz–stetige und kontrahierende Abbildungen I.

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt Lipschitz–stetig auf D, falls eine Konstante L existiert, sodass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L nennt man Lipschitz–Konstante.

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt kontrahierend, falls Φ Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstanten $L < 1$ ist. Man nennt in diesem Fall L die Kontraktionskonstante von Φ.

Bemerkung:

- Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \quad \text{für alle } x \neq y$$

gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend.

Lipschitz–stetige und kontrahierende Abbildungen II.

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.

Satz: Jede $\mathcal{C}^1$–Funktion $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf $[a, b]$ mit der Lipschitz–Konstanten

$$L := \sup\{|\Phi'(x)| \;:\; a \le x \le b\}$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x - y| \le L\,|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$

Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\ln(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $[1, \infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist nicht Lipschitz–stetig auf $[0, \infty)$.

Der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei $D \subset V$, $D \neq \emptyset$, abgeschlossen und $\Phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung mit einer Kontraktionskonstanten $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von Φ in D, d.h. $\Phi(x^*) = x^*$.
2) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt–Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*.

3) Es gilt die a priori–Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{L^n}{1 - L}\|x_1 - x_0\|$$

4) und die a posteriori–Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{L}{1 - L}\|x_n - x_{n-1}\|$$

Zum Banachschen Fixpunktsatz.

Bemerkung: Die beiden Fehlerabschätzungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

Beweisideen:
Dass es nur einen einzigen Fixpunkt gibt, sieht man folgendermaßen: Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^{**} \neq x^*$. Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \le L\,\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|$$

Die Konvergenz der Iteration folgt aus der Kontraktionseigenschaft der Abbildung Φ: speziell zeigt man, dass die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge mit Grenzwert x^* ist. Aus der Stetigkeit von Φ folgt dann $x^* = \Phi(x^*)$.

Ein Beispiel zum Banachschen Fixpunktsatz.

Berechne den Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.
Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen,
- es gilt $0 < \Phi(x) \le 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$,
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \le e/10 < 1$ für alle $x \in D$,
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.
Setze $x_0 = 1$. Dann ist $x_1 = e/10\ldots$, und es gilt die Abschätzung

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| = \frac{L^n}{1-L}(1 - e/10) = L^n$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{für } n \ge 11.$$