Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2012/13**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:
Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\,, & b_n &= \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-n-7}\right)^3\,, \\ c_n &= \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{4n^2+3}}{n}\,, & d_n &= \left(1-\frac{2}{3n}\right)^{17n}\,, \\ e_n &= \frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+2^n}\,, & f_n &= \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2n} \quad (\in \mathbb{C})\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 10:
Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 0\,,\quad a_{n+1} = 1 - \dfrac{a_n}{3}\,,$

b) $b_1 = \dfrac{1}{2},\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2+3}{4}\,,$

c) $c_1 = 1,\ c_{n+1} = 2c_n + 1\,,$

d) $d_1 = 3\,,\quad d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}\,.$

Aufgabe 11:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2 - x) ,$$

sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \leq 0$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 .$$

Aufgabe 12:
Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a , \quad x_1 = b , \quad x_{n+1} = x_n + 6x_{n-1}$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{(2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n)\, a + (3^n - (-2)^n)\, b}{5} .$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Abgabetermin: 3.12. - 7.12.12 (zu Beginn der Übung)