Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2012/13**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

a) $\boldsymbol{x}_n = \left(\dfrac{3n}{3^n}, \quad \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right), \quad \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n \cos y_n}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3y_n \cos x_n}{4} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

Hinweis: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n,$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!},$

c) $\dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{32} + \dfrac{9}{64} + \dfrac{27}{128} + \dfrac{81}{256} + \cdots,$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4+k}.$

Aufgabe 15:

a) Man stelle die reelle Zahl $x = 3.1\overline{415}$ unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe als Bruch dar.

b) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{n} - \frac{1}{n+1}$$

alterniert und dass $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ für $b_n := \frac{2 \cdot (-1)^n}{n} - \frac{1}{n+1}$ gilt.
Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

Aufgabe 16:

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+1} \, .$$

a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

b) Ab welchem Index n unterscheiden sich die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+1}$ vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.1?

c) Wie lautet die erste Nachkommastelle des Grenzwertes S?

Abgabetermin: 17.12. - 21.12.12 (zu Beginn der Übung)