**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2012/13**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

# Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 5

**Aufgabe 17:**

a) Man bestimme für folgende Mengen die Menge aller Häufungspunkte $M'$ und aller inneren Punkte $M^0$, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

$$\begin{aligned} M_1 &= (]-3,5] \cap ]2,8]) \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}\ , \\ M_2 &= \{0\} \cup [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}\ , \\ M_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < y < |x| < 1 \right\}\ . \end{aligned}$$

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x \tan x\ ,$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}\ .$

**Aufgabe 18:**

a) Man zeichne die durch

$$f(x) = x \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

gegebene Funktion und untersuche mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums, ob sie in $x_0 = 0$ durch $f(0) = 0$ stetig ergänzt werden kann.

b) Man zeichne die durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ e^x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion und überprüfe, ob sie in $x_0 = 0$ stetig ist.

**Aufgabe 19:**

a) Man berechne eine für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & 1 & , \\ f'(x) & = & x & \text{für} \quad -\infty < x < -2\,, \\ f'(x) & = & 1 & \text{für} \quad -2 < x < 1\,, \\ f'(x) & = & -2x & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{array}$$

und zeichne die Funktion.

b) Man bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für} \quad 0 < x < \infty\,, \\ ax + b & \text{für} \quad -\infty < x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar wird und skizziere dann $f$.

**Aufgabe 20:**

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = (2x+1)^{\sin x}\,, \qquad \text{ii) } g(x) = \frac{x + \sin x \cos x}{2}\,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x+2}{x^3+8}\,, \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(x^2-1)\,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 2(1-3x)^2 + 4(5x-2) - 7\,, \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{(5x+1)^2}\,.$$

**Abgabetermin:** 14.1. - 18.1.13 (zu Beginn der Übung)