

# Das Newton-Verfahren.

**Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Verwende** die **Newton-Iteration**:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für } f'(x_n) \neq 0$$

mit Startwert  $x_0$ .

Das Verfahren *konvergiert*, falls  $x_0$  nahe bei einer Nullstelle von  $f$  liegt.

**Beispiel:** Für  $f(x) = x^2 - 2$  und  $x_0 = 1$  erhält man

|       |        |        |         |              |              |     |
|-------|--------|--------|---------|--------------|--------------|-----|
| $n$   | 0      | 1      | 2       | 3            | 4            | ... |
| $x_n$ | 1.0000 | 1.5000 | 1.41667 | 1.4142 15686 | 1.4142 13562 | ... |

**Erinnerung:**  $f(\sqrt{2}) = 0$ , d.h.  $\sqrt{2} = 1.4142 13562 \dots$  ist Nullstelle von  $f$ .

# Konvergenz von Folgen.

## Definition:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem normierten Vektorraum  $V$ . Dann heißt

- $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  für  $n_j \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$  **Teilfolge** von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **beschränkt**, falls es ein  $C > 0$  gibt mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|a_n\| \leq C$$

- die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)**  $a \in V$ , falls
- $$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|a_n - a\| < \varepsilon$$

Eine nicht-konvergente Folge heißt **divergent**.

- die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

# Konvergenz von Folgen.

**Satz:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

- a)  $(a_n)$  konvergent  $\Rightarrow (a_n)$  beschränkt;
- b)  $(a_n)$  konvergent  $\Rightarrow (a_n)$  Cauchy-Folge;
- c) Falls  $(a_n)$  konvergiert, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

**Beweis von a):** Sei  $(a_n)$  konvergent mit Grenzwert  $a$ . Dann gilt für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  die **Abschätzung**

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

Damit ist die Folge  $(a_n)$  beschränkt mit der Konstanten

$$C := \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}$$

Also

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|a_n\| \leq C$$

# Konvergenz von Folgen.

**Beweis von b):** Sei  $(a_n)$  konvergent mit Grenzwert  $a$ . Dann gilt für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  die **Abschätzung**

$$\begin{aligned}\|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

für alle  $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$ .

**Beweis von c):** Sei  $(a_n)$  konvergent mit **verschiedenen** Grenzwerten  $a$  und  $\bar{a}$ ,  $a \neq \bar{a}$ . Dann gelten für  $\varepsilon > 0$  die Abschätzungen

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

$$\|a_n - \bar{a}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \bar{N}(\varepsilon)$$

Somit folgt für  $n \geq \max\{N(\varepsilon), \bar{N}(\varepsilon)\}$  die Ungleichung

$$\|a - \bar{a}\| = \|a - a_n + a_n - \bar{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \bar{a}\| < 2\varepsilon$$

Da dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $a = \bar{a}$  im Widerspruch zu  $a \neq \bar{a}$ .

# Bemerkungen zur Konvergenz von Folgen.

**Notation:** Für eine konvergente Folge  $(a_n)$  mit Grenzwert schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

**Uneigentliche Konvergenz ...**

**... bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert  $\pm\infty$ .**

Für **reelle** Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \iff \forall C > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > C$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \iff \forall C > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < -C$$

## Bemerkung.

Die Umkehrung der Aussage im Satz, Teil b),

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \implies (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in *gewissen* normierten Räumen, nämlich in

**vollständigen Räumen** bzw. **Banachräumen**.

Einen vollständigen *Euklidischen Vektorraum* nennt man auch

**Hilbertraum**.

Beispiele:

- für vollständige Räume:  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ,  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ;
- für einen nicht vollständigen Raum:  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_2)$ .

# Rechnen mit konvergenten Folgen.

**Satz:** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen  $(a_n + b_n)$  und  $(\lambda a_n)$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$  (bzw.  $\lambda \in \mathbb{C}$ ), wobei gilt

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

**Beweis:** Sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

a) Für  $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$  gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

b) Sei  $\lambda \neq 0$ . Dann gilt für  $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$  die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall  $\lambda = 0$  ist trivial.

# Die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge.

**Definition:** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $a$ .

- a) Die Folge  $(a_n)$  heißt (mindestens) **linear konvergent**, falls eine Konstante  $0 < C < 1$  und ein Index  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit:

$$\forall n \geq N : \|a_{n+1} - a\| \leq C \|a_n - a\|$$

- b) Die Folge  $(a_n)$  heißt (mindestens) **superlinear konvergent**, falls es eine nicht-negative Nullfolge  $C_n \geq 0$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$  gibt, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|a_{n+1} - a\| \leq C_n \|a_n - a\|$$

- c) Die Folge  $(a_n)$  heißt **konvergent** mit der **Ordnung** (mindestens)  $p > 1$ , falls es eine nicht-negative Konstante  $C \geq 0$  gibt, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|a_{n+1} - a\| \leq C \|a_n - a\|^p$$

## 3.3. Konvergenzkriterien für reelle Folgen

**Definition:** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt

$$\text{monoton wachsend} \iff \forall n < m : a_n \leq a_m$$

$$\text{streng monoton wachsend} \iff \forall n < m : a_n < a_m$$

$$\text{nach oben beschränkt} \iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \leq C$$

Analog definiert man die Begriffe

$$\text{monoton fallend} \iff \forall n < m : a_n \geq a_m$$

$$\text{streng monoton fallend} \iff \forall n < m : a_n > a_m$$

$$\text{nach unten beschränkt} \iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \geq C$$

### 3.3 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

**Satz:** Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

**Beweis:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann existiert ein  $N = N(\varepsilon)$  mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall n \geq N$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

## Folgerung: Prinzip der Intervallschachtelung.

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende reelle Folge und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende reelle Folge mit

$$a_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (\text{Intervallschachtelung})$$

Dann sind **beide** Folgen konvergent. Gilt weiterhin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

so haben  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein  $\xi \in \mathbb{R}$  mit

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| \quad |b_n - \xi| \leq |b_n - a_n|$$

## Beispiel: Prinzip der Intervallschachtelung.

Definiere für  $0 < a < b$  zwei Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  *rekursiv* durch

$$\begin{aligned}a_0 &:= a & b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n} & b_{n+1} &:= \frac{a_n + b_n}{2}\end{aligned}$$

Die Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  bilden eine *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Der gemeinsame Grenzwert von  $(a_n)$  und  $(b_n)$

$$\operatorname{agm}(a, b) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

heißt **arithmetisch–geometrisches Mittel** von  $a$  und  $b$ .

# Bernoullische Ungleichung und die geometrische Folge.

Es gilt

$$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$$

wobei Gleichheit nur bei  $n=1$  oder  $x=0$  gilt.

## Die Geometrische Folge.

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reelle Folge mit  $a_n = q^n$  für  $q \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$q > 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1+(q-1))^n \geq 1+n(q-1))$$

$$q = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$$

$$0 < q < 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \left( q^n = \frac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \frac{1}{1+n(1/q-1)} \right)$$

$$-1 < q \leq 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n)$$

$$q = -1 : (q^n) \text{ beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\})$$

$$q < -1 : (q^n) \text{ divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}$$

# Weitere Rechenregeln für konvergente Folgen.

**Satz:** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente reelle Folgen. Dann gilt

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

$$\text{b) } \forall n : b_n \neq 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\text{c) } \forall n : a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

**Beweis zu a):** Für hinreichend große  $n$  gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| < (C_a + |b|)\varepsilon \end{aligned}$$

Für b) und c) siehe Textbuch von Ansoerge/Oberle.

# Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Gegeben sei die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n := \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n$$

Es gilt

$$(n^2 + 5n + 1) - n^2 = (\sqrt{n^2 + 5n + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n)$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2 + 5n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5 + 0}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}$$

# Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Gegeben sei die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n := \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

**Kapitalverzinsung:** Anfangskapital  $K_0$ , Jahreszinssatz  $p$

|           |  |                 |
|-----------|--|-----------------|
| $K_1$     | $= K_0(1 + p)$                               | jährlich        |
| $K_2$     | $= K_0 \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2$       | halbjährlich    |
| $K_4$     | $= K_0 \left(1 + \frac{p}{4}\right)^4$       | vierteljährlich |
| $K_{10}$  | $= K_0 \left(1 + \frac{p}{10}\right)^{10}$   | monatlich       |
| $K_{360}$ | $= K_0 \left(1 + \frac{p}{360}\right)^{360}$ | täglich         |

Untersuche die Konvergenz der Folge  $(a_n)$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

# Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Für  $p > 0$  zeigt man, dass

a) die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend ist,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

b) die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt ist,

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \leq 4^l \quad (\text{wobei } l \in \mathbb{N} \text{ mit } l \geq p)$$

Damit konvergiert die Folge und für den Grenzwert erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^p$$

Die Grenzwertformel gilt auch für negative  $p$  und als Spezialfall erhalten wir die [Eulersche Zahl](#),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182\ 81828 \dots$$

# Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

**Satz:** (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Der Vektorraum  $\mathbb{R}$  ist **vollständig**, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

**Zur Erinnerung:**

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem normierten Vektorraum  $V$ . Dann heißt

- die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

Für den Beweis des Cauchyschen Konvergenzkriteriums benötigen wir

- a) das Prinzip der **Häufungspunkte** von Folgen,
- b) den **Satz von Bolzano und Weierstraß**.