

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$D_1 =]7, 10[, \quad D_2 = [-4, 4] \cup \left\{ \frac{9n}{1-2n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} ,$$
$$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2 \right\} .$$

Für jede Menge gebe man die Menge ihrer Häufungspunkte D' bzw. inneren Punkte D^0 an, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| - e^x ,$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 1}} .$

Aufgabe 18:

a) Man zeichne die durch

$$f(x) = \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

gegebene Funktion und überprüfe, ob sie in $x_0 = 0$ stetig ergänzt werden kann.

b) Man zeichne die durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{für } x < -1 \\ 2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

gegebene Funktion und untersuche mit Hilfe des ε - δ -Kriteriums, ob sie in $x_0 = -1$ stetig ist.

Aufgabe 19:

- a) Man bestimme eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f(2) = 5$ und

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\infty < x < -1, \\ -1 & \text{für } -1 < x < 1, \\ 2x & \text{für } 1 < x < \infty \end{cases}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

- b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \pi \\ ax + b, & \pi \leq x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = \pi$ stetig differenzierbar wird und zeichne f .

- c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \ln x$ im Punkt $x_0 = 1$ und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 20:

- a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = (5x^2)^x, \quad \text{ii) } g(x) = x - \sinh x \cosh x.$$

- b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}, \quad \text{ii) } k(x) = \ln(\cos x).$$

- c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 7(x-1)(x^2+x+1), \quad \text{ii) } v(x) = \sqrt{2-3x}.$$

Abgabetermin: 12.1. - 16.1.15 (zu Beginn der Übung)