

Aufgabe 1:

a) Man berechne den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} n - \sqrt{n^2 + 4n}$.

b) Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion $\sum_{k=0}^n \frac{4}{5^k} = 5 - \frac{1}{5^n}$.

c) Man berechne den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k$.

d) Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{10 + \sqrt{k}}$.

(i) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

(ii) Ab welchem Index n unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2}{10 + \sqrt{k}} \text{ vom Grenzwert } S \text{ der Reihe um höchstens } \frac{1}{6} ?$$

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x \end{cases}$.

Man bestimme $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = -1$ stetig differenzierbar wird, und skizziere f .

b) Man berechne den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - \ln(x+1)}$.

c) Man diskutiere die durch $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ gegebene Funktion wie folgt:

(i) man untersuche g auf Symmetrie,

(ii) kläre das Verhalten von g im Unendlichen,

(iii) gebe die Monotoniebereiche von g an und bestimme die Extremwerte.