

6 Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

6.1 Mittelwertsätze, Extremwerte, Satz von Taylor

Motivation: Wie wählt man Höhe und Durchmesser einer Konservendose, so dass bei festem Volumen V möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Sei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe der Konservendose. Dann gilt

$$f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

für die Oberfläche der Konservendose.

Ziel: Minimiere f unter Variation von r und h unter der Nebenbedingung

$$V = \pi r^2 h \quad \Longleftrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Minimiere somit

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

unter Variation von r . □

Klassifikation von Extrema.

Definition: Sei V normierter Vektorraum und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset V$, eine Funktion.

Dann hat die Funktion f in $x_0 \in D$

- ein **globales Maximum**, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
- ein **strenges globales Maximum**, falls $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$.
- ein **lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \implies f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in D.$$

- ein **strenges lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \implies f(x) < f(x_0) \quad \text{für alle } x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Die Begriffe **(strenges) globales Minimum** und **(strenges) lokales Minimum** definiert man analog. Weiterhin fasst man die Begriffe “Minimum” und “Maximum” unter dem Oberbegriff **Extremum** zusammen. □

Notwendige Kriterien für lokale Extrema.

Satz: Besitzt eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum, und ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Falls x_0 Randpunkt von $[a, b]$ (d.h. $x = a$ oder $x = b$), so gilt

- $f'(x_0) \leq 0$ ($f'(x_0) \geq 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = a$,
- $f'(x_0) \geq 0$ ($f'(x_0) \leq 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = b$.

Beweis: Sei $x_0 \in [a, b]$ ein lokales Maximum von f . Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{für } x_0 < x \leq \min(x_0 + \varepsilon, b),$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{für } \max(x_0 - \varepsilon, a) \leq x < x_0,$$

und daher $f'(x_0^-) \geq 0$ und $f'(x_0^+) \leq 0$. Für $x_0 \in (a, b)$ folgt somit $f'(x_0) = 0$. ■

Definition: Ein Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt **stationärer Punkt** von f . □

Zurück zu dem Beispiel mit der Blechdose.

Ziel: Minimiere

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

unter Variation von $r \in (0, \infty)$. Es gilt $h = \frac{V}{\pi r^2}$ für die Höhe der Dose.

- Die Funktion f ist stetig in $(0, \infty)$ und es gilt $V > 0$.
- Es gilt $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \infty$.
- f besitzt somit in $(0, \infty)$ ein globales Minimum.
- Die notwendige Bedingung

$$f'(r) = 4\pi r - 2\frac{V}{r^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\pi r^3 = 2V$$

für ein Minimum $r_0 \in (0, \infty)$ ist nur erfüllt für

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

- **Lösung:** f besitzt in r_0 ein strenges globales Minimum. Es gilt $h_0 = 2r_0$. □

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

- **Stationäre Punkte:** $2x - 3x^3 = 0$ gilt nur für $x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

- **Globale Minima** bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$.
- **Globale Maxima** bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$. □

Ein erster Mittelwertsatz.

Satz (Satz von Rolle): Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , so gilt die Implikation

$$f(a) = f(b) \implies \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0.$$

Beweis: Da f auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig ist, nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1: Liegen diese beiden Extrema am Rand des Intervalls $[a, b]$, so ist f konstant, woraus folgt $f'(x) \equiv 0$.

Fall 2: Anderenfalls liegt ein Extremum x_0 in (a, b) , woraus folgt $f'(x_0) = 0$.



Weitere Mittelwertsätze.

Satz:

- **Erster Mittelwertsatz**

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , so gilt:

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- **Zweiter Mittelwertsatz**

Sind die Funktionen f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis: 1. MWS: Die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a))$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn $h(a) = f(a) = h(b)$. Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{1}{b - a}(f(a) - f(b)).$$

2. MWS: Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, gilt $g(b) \neq g(a)$. Somit erfüllt die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn es gilt

$$h(a) = f(a) - g(a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = f(b) - g(b) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = h(b).$$

Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad \blacksquare$$

Folgerungen aus den Mittelwertsätzen.

Sei $f : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[\alpha, b]$. Dann gilt:

- Falls $f'(x) \equiv 0$, so ist f konstant auf $[\alpha, b]$.
- Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [\alpha, b]$, genau dann wenn f monoton wachsend.
- Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in [\alpha, b]$, dann ist f streng monoton wachsend.
- Falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [\alpha, b]$, genau dann wenn f monoton fallend.
- Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in [\alpha, b]$, dann ist f streng monoton fallend.

□

Beispiel. Betrachte $f(x) = x - \log(1 + x)$ für $x \in (-1, \infty)$. Wegen

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \begin{cases} < 0 & \text{für } -1 < x < 0, \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

ist f streng monoton fallend in $(-1, 0]$, streng monoton wachsend in $[0, \infty)$.

□

Definition (Landau-Symbole): Für eine Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, und $k \in \mathbb{N}_0$ sagt man:

$$\varphi(h) = o(h^k) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists C, \varepsilon > 0 : \forall 0 < |h| < \varepsilon : \left| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right| \leq C$$

□

Bedeutung:

$$\varphi(h) = o(h^k):$$

$\varphi(h)$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ **schneller** gegen Null als h^k .

$$\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k):$$

$\varphi(h)$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ **mindestens so schnell** gegen Null wie h^k .

Beispiel: Ist f differenzierbar in x_0 , so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$