3 Konvergenz von Folgen und Reihen

3.1 Normierte Vektorräume

Definition: *Sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ heißt* Norm *auf V, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

(N1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ *(*Definitheit*);*

(N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (*Homogenität*);*

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *für alle $v, w \in V$ (*Dreiecksungleichung*).*

V *zusammen mit $\|\cdot\|$ heißt dann* normierter Vektorraum.

Beispiele für Normierte Vektorräume.

- $\mathbb{R}$ mit der Betragsfunktion $|\cdot|$ ist ein normierter Vektorraum.
- Für $n \geq 1$ ist der $\mathbb{R}^n$, zusammen mit der p-Norm, $p \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

ein normierter Vektorraum.

Spezialfall: Für $p = 2$ bekommt man die Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Weiterhin ($p = \infty$)**:** Die Maximumnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Weitere Beispiele für Normierte Vektorräume.

Sei $V = C[a, b]$ der Vektorraum aller *stetigen* Funktionen auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

- Dann ist die p-Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad \text{für } f \in C[a, b],$$

für $p \in \mathbb{N}$ eine Norm auf V.

- **Wichtiger Spezialfall:** Für $p = 2$ ist die Euklidische Norm

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}, \qquad \text{für } f \in C[a, b],$$

eine Norm auf V.

- **Weiterhin** ($p = \infty$)**:** Die Maximumnorm ist gegeben durch

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|, \qquad \text{für } f \in C[a, b].$$

3.2 Folgen

Definition: *Sei V normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Eine* Folge *ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to V$, $n \mapsto a_n$, kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$.* □

Beispiele für Folgen.

- Reelle Folgen (Folgen reeller Zahlen), d.h. $V = \mathbb{R}$, z.B. ist

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

  eine reelle Folge.

- Komplexe Folgen (Folgen komplexer Zahlen), d.h. $V = \mathbb{C}$, z.B. ist

$$a_n = i^n, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

  eine komplexe Folge.

Weitere Beispiele für Folgen.

- Vektorenfolgen (Folgen von Vektoren), $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$, z.B. ist

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, n, \frac{1}{n^2}\right)^T \in \mathbb{R}^3, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

  eine Folge reeller Vektoren.

- Funktionenfolgen (Folge von Funktionen), etwa $V = C[a, b]$, z.B. ist für $[a, b] = [0, 1]$ die Folge

$$f(x) = x^n, \qquad \text{für } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

  eine Funktionenfolge.

Rechenoperationen mit Folgen.

Die Menge aller Folgen in V bildet einen Vektorraum, $V^{\mathbb{N}}$, für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in N} + (b_n)_{n\in N} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Rekursion und Iteration.

Folgen lassen sich `rekursiv` beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n), \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \longrightarrow V$$

eine bestimmte `Iterationsvorschrift` bezeichnet.

Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Voraussetzung:** $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- **Iteration:** Definiere zwei Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv mit den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und der folgenden Iterationsvorschrift.

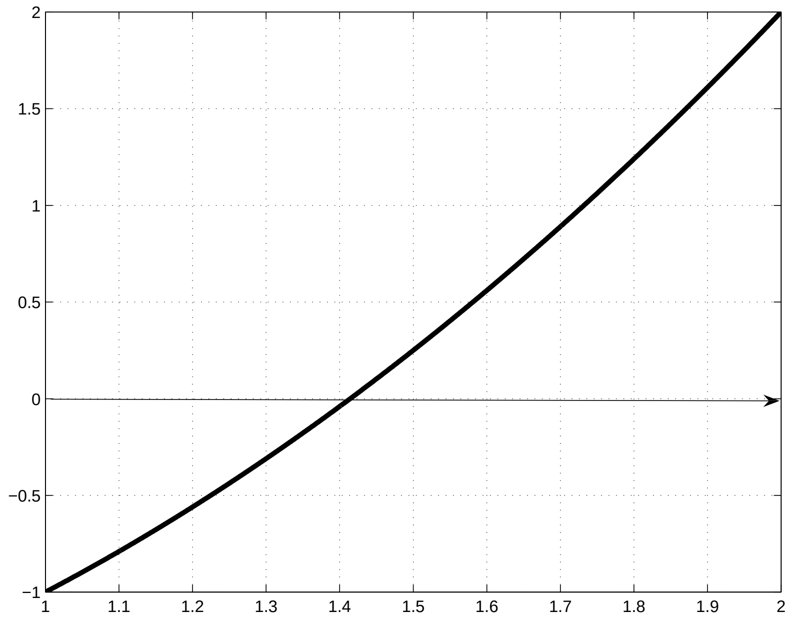
$$
\begin{array}{l}
\texttt{FOR}\; n = 1, 2, \ldots \\
\quad x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2 \\
\quad \texttt{IF}\; f(x) = 0 \;\texttt{THEN}\; \color{red}{\texttt{RETURN}} \\
\quad \texttt{IF}\; (f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0) \;\texttt{THEN} \\
\qquad u_n := x; \quad v_n := v_{n-1}; \\
\quad \texttt{ELSE} \\
\qquad u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x;
\end{array}
$$

OUTPUT: x mit $f(x) = 0$, Nullstelle von f in $[a, b]$.

Beispiel. $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$ und $b = 2$.

Beachte: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

n	u_n	v_n
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562



Graph von $f(x) = x^2 - 2$.

Beobachtung: Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!

Das Newton-Verfahren.

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Verwende** `Newton-Iteration`**:**

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{für } f'(x_n) \neq 0,$$

mit Startwert x_0.

Bemerkung: Verfahren *konvergiert*, falls x_0 nahe bei einer Nullstelle von f liegt.

Beispiel: Für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 1$ erhält man

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
t_n	1.0000	1.5000	$1.4166\,66667$	$1.4142\,15686$	$1.4142\,13562$	$\cdots$

Erinnerung: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

Konvergenz von Folgen.

Definition: *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in einem normierten Vektorraum* V.

Dann heißt

- $(a_{n_j})_{j\in N}$ *für* $n_j \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ *eine* `Teilfolge` *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ `beschränkt`, *falls es ein* $C > 0$ *gibt mit*

$$\forall\, n \in N \; : \|a_n\| \leq C.$$

- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ `konvergent` *mit* `Grenzwert` *(*`Limes`*)* $a \in V$, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

  Eine nicht-konvergente Folge heißt `divergent`.

- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ `Cauchy-Folge`, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \geq N : \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

$\square$

Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

(a) (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) beschränkt;

(b) (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) Cauchy-Folge;

(c) Falls (a_n) konvergiert, so ist der Grenzwert von (a_n) eindeutig bestimmt.

Beweis von (a): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Damit ist die Folge (a_n) beschränkt mit der Konstanten

$$C = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}.$$

Also

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \colon \|a_n\| \leq C.$$

$\square$

Beweis von (b): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$ □

Beweis von (c): Sei (a_n) konvergent mit *verschiedenen* Grenzwerten a und $\overline{a}$. Dann gelten für $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|a_n - a\| < \varepsilon \quad & \text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \\ \|a_n - \overline{a}\| < \varepsilon \quad & \text{für alle } n \geq \overline{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Somit folgt für $n \geq \max\{N, \overline{N}\}$ die Ungleichung

$$\|a - \overline{a}\| = \|a - a_n + a_n - \overline{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \overline{a}\| < 2\varepsilon.$$

Da dies für *jedes* $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a = \overline{a}$ im Widerspruch zur Annahme $a \neq \overline{a}$. ■

Notationen.

Für eine konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Uneigentliche Konvergenz . . .

. . . bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$.

Für *reelle* Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : a_n > C$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : a_n < -C$$

□

Bemerkungen.

Die Umkehrung der Aussage im Satz, Teil (b),

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \qquad \Longrightarrow \qquad (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in *gewissen* normierten Räumen, nämlich in

vollständigen Räumen bzw. **Banachräumen.**

Einen vollständigen *Euklidischen Vektorraum* nennt man

Hilbertraum.

Beispiele:

- für vollständige Räume: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$;
- für einen nicht vollständigen Raum: $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$.

Satz: *Seien* (a_n) *und* (b_n) *zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen* $(a_n + b_n)$ *und* (λa_n) *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\lambda \in \mathbb{C}$*), wobei gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, d.h. a sei Grenzwert von (a_n) und b sei Grenzwert von (b_n).

(a): Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b): Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist *trivial*. ■

Konvergenzgeschwindigkeit.

Definition: *Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a.*

(a) *Die Folge (a_n) heißt (mindestens)* `linear konvergent`*, falls eine Konstante $0 < C < 1$ und ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\forall n \geq N : \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|$$

(b) *Die Folge (a_n) heißt (mindestens)* `superlinear konvergent`*, falls es eine nicht-negative Nullfolge $C_n \geq 0$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, so dass*

$$\forall n : \|a_{n+1} - a\| \leq C_n\|a_n - a\|$$

(c) *Die Folge (a_n) heißt* `konvergent` *der* `Ordnung` *(mindestens) $p > 1$, falls es eine nicht-negative Konstante $C \geq 0$ gibt mit*

$$\forall n : \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|^p.$$

□