4 Konvergenz von Folgen und Reihen

4.1 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Definition: *Eine reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

$$\texttt{monoton wachsend} \iff \forall n < m : a_n \leq a_m$$
$$\texttt{streng monoton wachsend} \iff \forall n < m : a_n < a_m$$
$$\texttt{nach oben beschränkt} \iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \leq C$$

Analog definiert man die Begriffe

$$\texttt{monoton fallend} \iff \forall n < m : a_n \geq a_m$$
$$\texttt{streng monoton fallend} \iff \forall n < m : a_n > a_m$$
$$\texttt{nach unten beschränkt} \iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \geq C$$

$\square$

Satz: *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall\, n \geq N,$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \equiv N(\varepsilon)$$

■

Folgerung (Prinzip der Intervallschachtelung)**:**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende reelle Folge und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende reelle Folge mit*

$$a_n \leq b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind **beide** *Folgen konvergent. Gilt weiterhin*

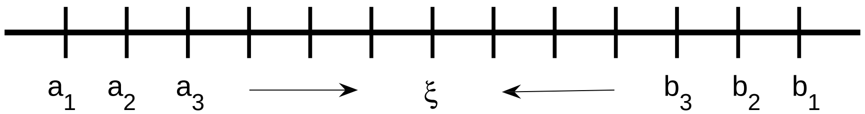
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0,$$

so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein* $\xi \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| \qquad \text{und} \qquad |b_n - \xi| \leq |b_n - a_n|.$$



$\square$

Beispiel.

Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) *rekursiv* durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= a & \qquad b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n} & \qquad b_{n+1} &:= (a_n + b_n)/2 \quad \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

heißt `arithmetisch-geometrisches Mittel` von a und b. □

Die Bernoullische Ungleichung.

Es gilt

$$\forall\, x \geq -1,\ n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

wobei Gleichheit nur für $n = 1$ oder $x = 0$ gilt.

Beweis: vollständige Induktion.

Die Geometrische Folge.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge mit $a_n := q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
q > 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1)) \\
q = 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\
0 < q < 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \left(q^n = \frac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \frac{1}{1+n(1/q-1)}\right) \\
-1 < q \leq 0 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n) \\
q = -1 \quad &: \quad (q^n) \text{ beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\}) \\
q < -1 \quad &: \quad (q^n) \text{ divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}
\end{aligned}$$

Weitere Rechenregeln.

Satz: *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente reelle Folgen. Dann gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(b) $\forall\, n : b_n \neq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

(c) $\forall\, n : a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n}$

Beweis: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Beweis von (a): Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< (C_a + |b|)\varepsilon \end{aligned}$$

Beweis von (b): Da $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ existiert eine Konstante $C_b > 0$ mit

$$C_b \leq |b_n| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| < \frac{1}{C_b \cdot |b|} \cdot \varepsilon$$

für hinreichend große $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$.

Nun folgt die Aussage in Teil (b) direkt aus Teil (a), denn es gilt $1/b_n \to 1/b$.

Beweis von (c): Wir setzen hierzu folgenden Satz voraus.

Satz: Zu $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Zahl $w > 0$ mit $w^m = a$. Diese Zahl wird mit $w = \sqrt[m]{a}$ bezeichnet.

Fall 1: Sei (a_n) eine Nullfolge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$a_n < \varepsilon^m \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon^m)$$

Daraus folgt

$$0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \varepsilon$$

und daher $\sqrt[m]{a_n} \to 0$ für $n \to \infty$.

Fall 2: Sei $a > 0$. Verwende die Identität

$$\begin{aligned}
&(x-y)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}y^{j-1} \\
=\quad & (x-y)\cdot\left(x^{m-1}y^0 + x^{m-2}y^1 + \ldots + x^0y^{m-1}\right) \\
=\quad & x^my^0 + \underbrace{x^{m-1}y^1 + \ldots + x^1y^{m-1} - x^{m-1}y^1 - \ldots - x^1y^{m-1}}_{=0} - x^0y^m \\
=\quad & x^m - y^m
\end{aligned}$$

Setze nun $x = \sqrt[m]{a_n}$ und $y = \sqrt[m]{a}$. Dann folgt für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}\right| \quad &= \quad \frac{|a_n - a|}{\left|(\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + \ldots + (\sqrt[m]{a})^{m-1}\right|} \\
&\leq \quad \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[m]{a})^{m-1}} \\
&< \quad C \cdot \varepsilon \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt{n^2+5n+1} - n$$

Es gilt

$$(n^2+5n+1) - n^2 = \left(\sqrt{n^2+5n+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+5n+1} + n\right),$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2+5n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \frac{5n+1}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \frac{5+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5+0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}.$$

$\square$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Satz (`Bolzano-Weierstraß`)**:**

Jede reelle beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge. Dann gibt es ein Intervall $[A, B]$ mit $\forall n : a_n \in [A, B]$. Betrachte nun die folgende Bisektionsmethode.

```
A₁ := A;
B₁ := B;
FOR k = 1, 2, 3, ...
    C := (A_k + B_k)/2
    IF {n | a_n ∈ [A_k, C]} unendlich THEN
        A_{k+1} := A_k;   B_{k+1} := C;
    ELSE
        A_{k+1} := C;   B_{k+1} := B_k;
```

Beobachtung: Die Folgen (A_k) und (B_k) bilden eine Intervallschachtelung, d.h. $\forall\, k : A_k \leq B_k$, und es gibt einen gemeinsamen Grenzwert

$$\xi = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k.$$

Definiere nun eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) wie folgt.

- Setze $n_1 := 1$;
- FOR $k = 2, 3, 4, \ldots$

  wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Wegen

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

gilt dann $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$. ■

Definition: *Sei* $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Teilfolge einer Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Dann wird der Grenzwert der Teilfolge* $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *als* Häufungspunkte *der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bezeichnet.* □

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: *Der Körper $\mathbb{R}$ ist* `vollständig`*, d.h. jede reelle Cauchyfolge konvergiert.*

Beweis: Zeige, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist: Für n und $N = N(\epsilon)$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \le |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ. Dann gilt für $m, n_k \ge N(\varepsilon/2)$:

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\le \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

Notation:

lim inf a_n = kleinster Häufungspunkt, lim sup a_n = größter Häufungspunkt.

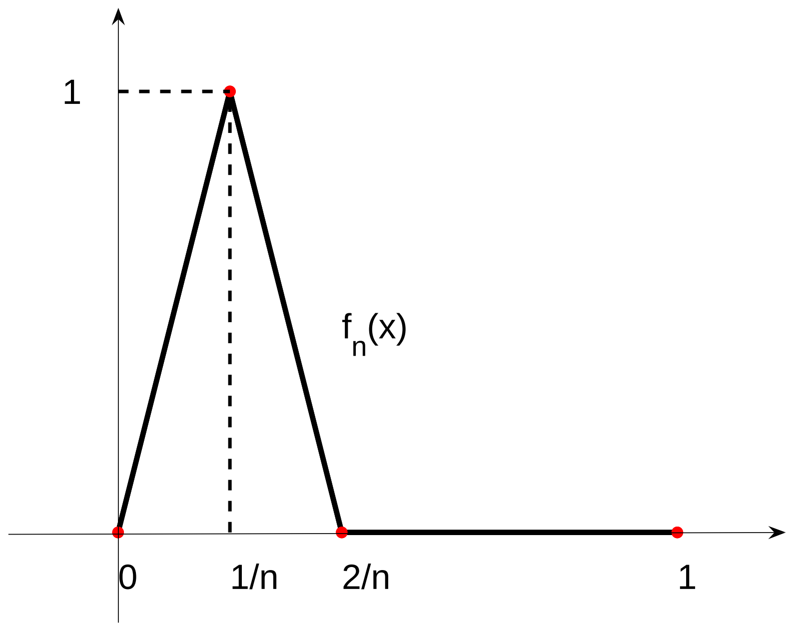
4.2 Konvergenz in normierten Vektorräumen

Beispiel. Betrachte den Vektorraum $C[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Für jedes $n \geq 2$ liegt die Funktion

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, 1/n]; \\ 2 - nx & \text{für } x \in [1/n, 2/n]; \\ 0 & \text{für } x \in [2/n, 1]; \end{cases}$$

in $C[0,1]$, d.h. $f_n \in C[0,1]$ für alle $n \geq 2$.



Der Graph von $f_n(x)$.

Beobachtung: $\{f_n\}_{n\geq 2}$ bildet eine Folge von Funktionen in $C[0,1]$.

Wie sieht es mit der Konvergenz von f_n in $C[0,1]$ aus?

Fall 1. Verwende die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Dann gilt

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} |nx|^2\,dx + \int_{1/n}^{2/n} |2-nx|^2\,dx + \int_{2/n}^{1} 0\,dx = \ldots = \frac{2}{3n}$$

und somit $\|f_n\|_2 \leq 1/\sqrt{n}$ für $n \geq 2$. Die Folge $\{f_n\}_{n\geq 2}$ ist somit bezüglich der Euklidischen Norm eine Nullfolge in $C[0,1]$, d.h. $\{f_n\}_{n\geq 2}$ konvergiert gegen Null.

Fall 2. Verwende die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1, \qquad \text{für alle } n \geq 2,$$

und es gibt *keine* stetige Funktion $f \in C[0,1]$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

Somit divergiert die Folge $\{f_n\}_{n\geq 2}$ in $C[0,1]$ bezüglich der Maximumnorm.

Fazit: Die Konvergenz einer Folge $(a_n)_n$ ist im Allgemeinen nicht nur abhängig vom zugrunde liegenden Vektorraum V, sondern auch (und vor allem!) von der verwendeten Norm $\|\cdot\|$. $\square$

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Bemerkung: In endlichdimensionalen Vektorräumen ist die Konvergenz (und der Grenzwert) einer Folge jedoch lediglich von dem jeweiligen Vektorraum abhängig, nicht von der zugrunde liegenden Norm.

Satz (Normäquivalenzsatz)**:** *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Dann gibt es Konstanten $C, C' > 0$ mit*

$$C\|v\| \leq \|v\|' \leq C'\|v\|, \qquad \text{für alle } v \in V,$$

d.h. die beiden Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent auf V. □

Fazit: Eine Folge (a_n), die in einem endlichdimensionalen Vektorraum V bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ in V gegen einen Grenzwert $a \in V$ konvergiert, konvergiert ebenso bezüglich jeder anderen Norm $\|\cdot\|'$ in V gegen a. □

- **Beispiele für endlichdimensionale Vektorräume:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.
- **Beispiel für einen unendlichdimensionalen Vektorraum:** $C[a, b]$.

Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$.

Folgerung: *Eine Folge* $(\mathbf{x}_m)$ *im* $\mathbb{R}^n$ *konvergiert genau dann, wenn alle* n *Koordinatenfolgen* $(x_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, n$, *in* $\mathbb{R}$ *konvergieren. Der Grenzwert der Folge* $(\mathbf{x}_m)$ *lässt sich komponentenweise berechnen.*

Beweis: $\mathbf{x}_m \to \mathbf{x}$ ist äquivalent zu

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|_\infty \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall 1 \le j \le n : |x_j^{(m)} - x_j| \to 0, \quad m \to \infty,$$

und somit $x_j^{(m)} \to x_j$, $m \to \infty$, für alle $j = 1, \ldots, n$. ■

Beispiel: Für die Folge $(\mathbf{x}_m)$, gegeben durch

$$\mathbf{x}_m = \left(\frac{1}{m}, 1 + \exp\left(\frac{1}{m}\right), \frac{m^2 + 2m + 3}{2m^2 - 1}\right)^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = (0, 2, 1/2)^T \in \mathbb{R}^3.$$

□

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Folgerung: In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt

- das Cauchysche Konvergenzkriterium:

$$\exists\, \mathbf{a} \,:\, \mathbf{a}_m \to \mathbf{a}\ (m \to \infty)$$
$$\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \equiv N(\varepsilon)\ :\ m, n \geq N\ :\ \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

- der Satz von Bolzano-Weierstraß:

  Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt } \Longrightarrow (a_n) \text{ divergent;}$$
$$|z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = |z|^n \to 0\ (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

$\square$