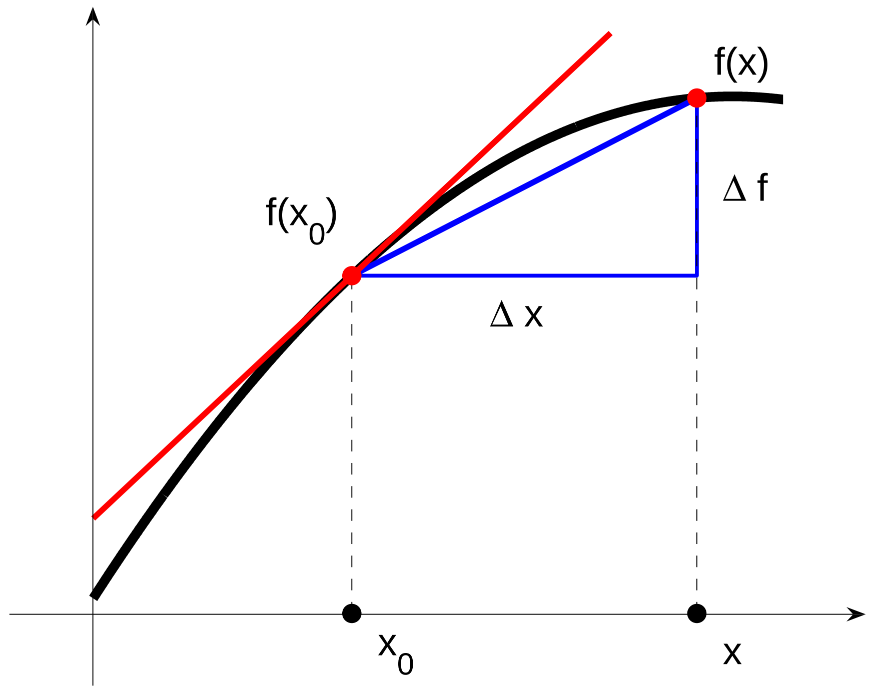
5.2 Differentialrechnung einer Variablen



Differenzenquotient und Differentialquotient.

Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \text{für } x \neq x_0,$$

gibt die Sekantensteigung an. Betrachten nun den Grenzübergang $x \to x_0$.

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0 \in D \cap D'$ *ein Punkt.*

- *Für* $x \in D$, $x \neq x_0$, *nennt man den Ausdruck*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  `Differenzenquotient` *bzw.* `Sekantensteigung` *von* f *bezüglich* x.

- *Die Funktion* f *heißt* `differenzierbar` *in* x_0, *falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert `Ableitung` *oder* `Differentialquotient` *der Funktion* f *an der Stelle* x_0 *und schreibt*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

□

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0 \in D \cap D'$ *ein Punkt.*

- *Dann heißen die einseitigen Grenzwerte*

$$f'(x_0^+) \;:=\; \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) \;:=\; \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

`rechtsseitige` *bzw.* `linksseitige Ableitung` *von* f *bei* x_0*.*

$\square$

Bemerkung: *Falls* f *differenzierbar in* x_0, *so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von* f *bei* x_0 *überein.* $\square$

Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die zeitliche Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \to \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R},$$

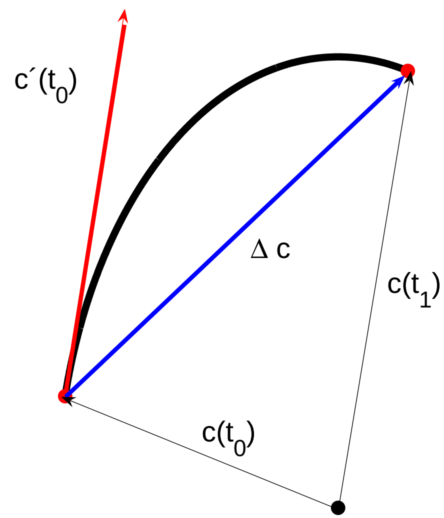
wobei t die Zeit und $c(t)$ der Ort des Massenpunktes. Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

die Geschwindigkeit, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

Erklärung: In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massenpunkt die Strecke $\Delta c = c(t) - c(t_0)$ zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}.$$



Für $t \to t_0$ erhält man die *momentane Geschwindigkeit*,

$$\dot{c}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}.$$

Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die Monomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j, \qquad \text{für } x, x_0 \in \mathbb{R},$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Fazit: Die Funktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n x^{n-1}, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

für die (erste) Ableitung von f. $\square$

Bemerkung: Für eine konstante Funktion $f(x) \equiv c$ gilt $f'(x) \equiv 0$. $\square$

Linearität der Ableitung.

Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R},$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x).$$

Ableitung von Polynomen.

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom, d.h. p hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R} \text{ für } 0 \le k \le n.$$

Dann ist die (erste) Ableitung von p gegeben durch

$$\frac{d}{dx}(p(x)) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k\, k\, x^{k-1}.$$

Ableitung elementarer Funktionen.

Funktion	Ableitung	Parameter
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1/\cos^2(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$

Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, eine vektorwertige Funktion, d.h. f hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann wird die Ableitung von f *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_m'(x))^T, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele:

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$
$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$

$\square$

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

Satz: *Ist* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in D^0$ *differenzierbar, so ist* f *in* x_0 *stetig.*

Beweis: Sei f in x_0 differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \cdot f'(x_0)\right) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) f'(x_0) = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. die Funktion f ist in x_0 stetig. ■

VORSICHT! Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Allgemeinen nicht!

Beispiel: Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in Null. □

Wichtige Differentiationsregeln.

Satz: *Seien* $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, *in* $x_0 \in D^0$ *differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.*

(a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist* $\alpha f + \beta g$ *in* x_0 *differenzierbar, und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(b) Die Funktion $f \cdot g$ *ist in* x_0 *differenzierbar, und es gilt die* Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(c) Ist $g(x_0) \neq 0$, *so ist die Funktion* $f(x)/g(x)$ *in* x_0 *differenzierbar, und es gilt die* Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis: Die Behauptung in Teil (a) folgt unmittelbar aus der Identität

$$\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} = \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Genauso folgt Teil (b) aus der Identität

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Zu Teil (c): Es gilt

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \qquad \text{für } g(x_0), g(x) \neq 0,$$

und somit $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ für $g(x_0) \neq 0$.

Die Behauptung folgt schließlich wie folgt aus der Produktregel, Teil (b).

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

■

Weitere Wichtige Differentiationsregeln.

Satz:

(a) Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ *mit* $D, E \subset \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$.
Falls f *differenzierbar in* x_0 *und* g *differenzierbar in* $y_0 = f(x_0)$, *so ist auch die Komposition* $g \circ f$ *in* x_0 *differenzierbar, und es gilt die* `Kettenregel`

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

(b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend und in* $x_0 \in [a, b]$ *differenzierbar mit* $f'(x_0) \neq 0$, *so ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ *in* $y_0 = f(x_0)$ *differenzierbar, und es gilt*

$$\left((f^{-1})' \circ f\right)(x_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis: Teil (a): Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \eta_1(x)(x - x_0), & \lim\nolimits_{x\to x_0} \eta_1(x) = f'(x_0), \\ g(y) &= g(y_0) + \eta_2(y)(y - y_0), & \lim\nolimits_{y\to y_0} \eta_2(y) = g'(y_0), \end{aligned}$$

wobei $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$. Daraus folgt

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + \eta_2(f(x)) \cdot \eta_1(x)(x - x_0)$$

und somit

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \eta_2(f(x)) \cdot \eta_1(x) \longrightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \text{für } x \to x_0.$$

Teil (b): Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) = f(x_0) + \eta(x)(x - x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} \eta(x) = f'(x_0) \neq 0,$$

somit $y = y_0 + \eta(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$ für $x = f^{-1}(y)$, und daher

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\eta(f^{-1}(y))} \longrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \text{für } y \to y_0. \qquad \blacksquare$$

Verallgemeinerte Produktregel.

Satz: *Ist* $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine* Bilinearform*, und sind* $f, g : D \to \mathbb{R}^n$*,* $D \subset \mathbb{R}$*, in* $x_0 \in D^0$ *differenzierbar, so ist auch die Funktion* (f, g) *in* x_0 *differenzierbar, und es gilt die* verallgemeinerte Produktregel

$$\frac{d}{dx}(f(x), g(x))\bigg|_{x=x_0} = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)).$$

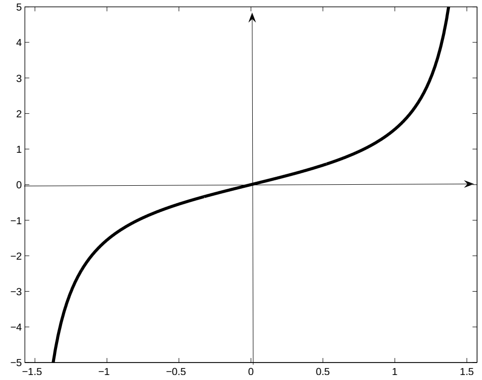
Beweis: Analog zum Beweis der Produktregel:

$$\frac{(f(x), g(x)) - (f(x_0), g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, g(x)\right) + \left(f(x_0), \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)$$

$$\longrightarrow (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)), \quad \text{für } x \to x_0. \qquad \blacksquare$$

Beispiel: Anwendung der Quotientenregel.



Betrachte die Tangensfunktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{für } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Aus den Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

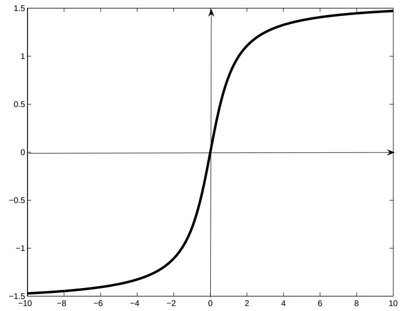
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

erhält man die Ableitung der Tangensfunktion mit der Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion.

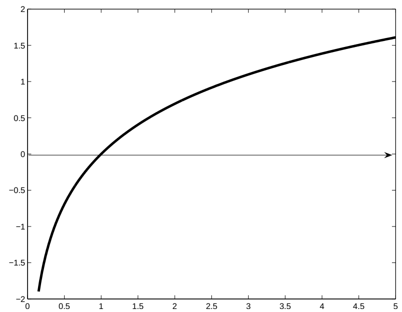


Beispiel 1: Betrachte die Umkehrfunktion der Tangensfunktion,

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Für die Ableitung von $x = \arctan(y)$, d.h. $y = \tan(x)$, erhält man

$$\frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\tan(x)} = \frac{1}{1/\cos^2(x)} = \cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}.$$



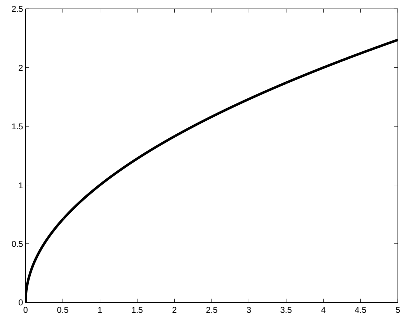
Beispiel 2: Betrachte den Logarithmus, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp(x)$,

$$\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Für die Ableitung von $x = \log(y)$, d.h. $y = \exp(x)$, erhält man

$$\frac{d}{dy}\log(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}, \qquad \text{für } y \in (0, \infty). \qquad \blacksquare$$

Weiteres Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion.



$f(x) = \sqrt{x}$

Betrachte Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot} : (0, \infty) \to (0, \infty)$,

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} \qquad \text{für } x \in (0, \infty) \text{ und } n \geq 2,$$

als Umkehrfunktion der Monomfunktion $f(x) = x^n$.

Für die Ableitung von $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$, d.h. $y = x^n$, erhält man

$$\frac{d}{dy} \sqrt[n]{y} = \frac{1}{\frac{d}{dx} x^n} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n} - 1}.$$

■

Zwei Beispiele zur Anwendung der Kettenregel.

Beispiel 1: Betrachte für $f(x) = \exp(x)$ und $g(y) = \cos(y)$ die Komposition

$$(g \circ f)(x) = \cos(\exp(x)) : \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

Die Ableitung von $g \circ f$ berechnet man mit der Kettenregel wie folgt.

$$\frac{d}{dx} \cos(\exp(x)) = -\sin(\exp(x)) \cdot \exp(x)$$

Beispiel 2: Betrachte die Exponentialfunktion $a^x = \exp(x \cdot \log(a))$ für $a > 0$.

Die Ableitung der Funktionen a^x und x^x berechnet man mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx}(\exp(x \log(a))) = \exp(x \log(a)) \cdot \log(a) = \log(a) \cdot a^x \\
\frac{d}{dx} x^x &= \frac{d}{dx}(\exp(x \log(x))) = \exp(x \log(x)) \left(1 \cdot \log(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\
&= x^x \left(1 + \log(x)\right), \quad \text{für } x > 0.
\end{aligned}$$

■

Ableitungen höherer Ordnung.

- Ist eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar, so ist die Ableitung von f ebenso eine Funktion, $f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Ist f' überall differenzierbar, so erhält man die zweite Ableitung f'' von f.
- Ist f'' überall differenzierbar, so erhält man die dritte Ableitung f''' usw.
- Ist f n-mal differenzierbar auf $[a, b]$ und ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf $[a, b]$ stetig, so heißt f n-mal stetig differenzierbar, C^n-Funktion.
- Ist f n-mal differenzierbar auf $[a, b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so heißt f beliebig oft differenzierbar (unendlich oft differenzierbar), C^∞-Funktion.

Notation:

$$f \in C^0([a, b]) \quad :\Longleftrightarrow \quad f \text{ stetig auf } [a, b]$$

$$f \in C^n([a, b]) \quad :\Longleftrightarrow \quad f \ n\text{-mal stetig differenzierbar auf } [a, b]$$

$$f \in C^\infty([a, b]) \quad :\Longleftrightarrow \quad f \text{ beliebig oft differenzierbar auf } [a, b]$$