

Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



WiSe 2015/2016

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben →**
<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vettors, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

**Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>**

Buch Kap. 1.4 – Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen

- 1) **1 ist eine natürliche Zahl.**
- 2) **Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise $2=1'$, $3=2'$ usw.).**
- 3) **1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.**
- 4) **die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).**
- 5) **Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit**
 - (i) $1 \in A$,**
 - (ii) $n \in A \implies n' \in A$.****Dann ist $A = \mathbb{N}$.**

Buch Kap. 1.4 – Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Satz 1.1: (Prinzip der vollständigen Induktion)

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.
Wenn die beiden Aussagen

- 1) $A(n_0)$ ist wahr,
- 2) für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$: $A(k)$ ist wahr $\implies A(k + 1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Buch Kap. 1.4 – Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet.

Danach lässt sich jede natürliche Zahl $n > 1$ auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$$

mit $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \dots < p_k$.

Buch Kap. 1.5 – Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

$$n + x = m$$

für beliebige $n, m \in \mathbb{Z}$ nach x auflösbar.

Merke: \mathbb{Z} abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation.

Aber: Nicht gegenüber Division, denn

Sucht man eine Lösung x der Gleichung $nx = m$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so gibt es eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ nur dann, wenn n ein Teiler von m ist.

Erweiterung von \mathbb{Z} notwendig.

Buch Kap. 1.5 – Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a, b \text{ teilerfremd} \right\}$$
$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ (setze } b = 1 \text{)}$$

”a, b teilerfremd” \Rightarrow Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen sind keine eigenständige Elemente in \mathbb{Q} .

Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange ”gekürzt”, bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $\text{ggT}(a, b) = 1$.

In \mathbb{Q} hat die Gleichung $nx = m$, ($n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$) eine Lösung $x = \frac{m}{n}$.

Buch Kap. 1.5 – Periodische Dezimalbrüche

$a \in \mathbb{Q} \rightarrow a$ darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch:

$$a = \sum_{n=0}^m z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k}, \quad z_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

darstellen.

Kurzform: $a = z_m z_{m-1} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$

Bsp: $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857 =$

$$10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + \dots,$$

Periode hier 142857.

Bsp: $\frac{90}{8} = 11\,25000\dots$

$$1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

Periode hier 0.

Buch Kap. 1.5 – Reelle Zahlen

Beachte: $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$ existiert nicht!

Erweiterung von \mathbb{Q} notwendig \rightarrow Reelle Zahlen

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}.$$

**Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche.
Man kann nur Näherungen angeben, z.B.**

$$1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421 \dots$$

für $x = \sqrt{2}$.

Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen.