

# Analysis I

**Michael Hinze**  
**(zusammen mit Peywand Kiani)**

Department Mathematik  
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



**WiSe 2015/2016**

## Beachtenswertes

- Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- **Übungsaufgaben** → <http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- Als Formelsammlung empfehlen wir: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Klaus Vettors, 3. Auflage, Teubner 2001.

# Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

**Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:  
<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>**

## Buch Kap. 1.4 – Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

### Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

- 1) **1 ist eine natürliche Zahl.**
- 2) **Jede natürliche Zahl  $n$  hat genau einen Nachfolger  $n'$  (Schreibweise  $2=1'$ ,  $3=2'$  usw.).**
- 3) **1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.**
- 4) **die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).**
- 5) **Induktionsprinzip: Sei  $A \subseteq \mathbb{N}$  mit**
  - (i)  $1 \in A$ ,**
  - (ii)  $n \in A \implies n' \in A$ .****Dann ist  $A = \mathbb{N}$ .**

## Buch Kap. 1.4 – Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

### Satz 1.1: (Prinzip der vollständigen Induktion)

Seien  $n_0 \in \mathbb{N}$  und  $A(n)$  eine Aussageform für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$ .  
Wenn die beiden Aussagen

- 1)  $A(n_0)$  ist wahr,
- 2) für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq n_0$  :  $A(k)$  ist wahr  $\implies A(k + 1)$  ist wahr

gelten, dann ist die Aussage  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  wahr.

## Buch Kap. 1.4 – Fundamentalsatz der Arithmetik

**Jede natürliche Zahl  $n > 1$  lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet.**

**Danach lässt sich jede natürliche Zahl  $n > 1$  auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen:**

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$$

**mit  $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ ,  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ .**

## Buch Kap. 1.5 – Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

$$n + x = m$$

für beliebige  $n, m \in \mathbb{Z}$  nach  $x$  auflösbar.

**Merke:**  $\mathbb{Z}$  abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation.

**Aber:** Nicht gegenüber Division, denn

Sucht man eine Lösung  $x$  der Gleichung  $nx = m$  für  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , so gibt es eine Lösung  $x \in \mathbb{Z}$  nur dann, wenn  $n$  ein Teiler von  $m$  ist.

Erweiterung von  $\mathbb{Z}$  notwendig.

## Buch Kap. 1.5 – Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a, b \text{ teilerfremd} \right\}$$
$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ (setze } b = 1 \text{)}$$

**” $a, b$  teilerfremd”  $\Rightarrow$  Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen sind keine eigenständige Elemente in  $\mathbb{Q}$ .**

**Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange ”gekürzt”, bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist,  $\text{ggT}(a, b) = 1$ .**

**In  $\mathbb{Q}$  hat die Gleichung  $nx = m$ , ( $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ ) eine Lösung  $x = \frac{m}{n}$ .**



## Buch Kap. 1.5 – Periodische Dezimalbrüche

$a \in \mathbb{Q} \rightarrow a$  darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch:

$$a = \sum_{n=0}^m z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k}, \quad z_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

darstellen.

Kurzform:  $a = z_m z_{m-1} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$

Bsp:  $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857 =$

$$10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + \dots,$$

Periode hier 142857.

Bsp:  $\frac{90}{8} = 11\,25000\dots$

$$1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

Periode hier 0.

## Buch Kap. 1.5 – Reelle Zahlen

**Beachte:  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$  existiert nicht!**

**Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  notwendig  $\rightarrow$  Reelle Zahlen**

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}.$$

**Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche.  
Man kann nur Näherungen angeben, z.B.**

$$1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421 \dots$$

für  $x = \sqrt{2}$ .

**Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen.**