Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

27. Oktober 2015

Notizen

Bsp. für Addition und Multiplikation komplexer Zahlen $z = a + ib$ $(\equiv a+bi)$

$z_1 = 1+2i$, $z_2 = 4+i$

d.h. $a_1 = 1, b_1 = 2,$ $a_2 = 4, b_2 = 1$

$\rightarrow$ $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1+b_2) = 5 + 3i$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$= 2 + i\,9$

Merkformel für Multiplikation

$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + \underbrace{(ib_1)(ib_2)}_{\underbrace{i^2 b_1 b_2}_{-b_1 b_2}}$

$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

Notizen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(1+2i)(4-i)}{17} \quad , \text{ weil } |z_2|^2 = z_2 \cdot \bar{z}_2$$

$$= (4+i)(4-i)$$

$$= 4^2 - i^2$$

$$= 16 + 1 = 17$$

$$= \frac{6+7i}{17}$$

Rechenregeln $z = a+ib$

$$z + \bar{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}\, z \qquad \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$z - \bar{z} = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}\, z \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

In der Menge der komplexen Zahlen können wir mit Hilfe der p-q Formel jede quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{ergibt} \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \; ,$$

Universität Hamburg

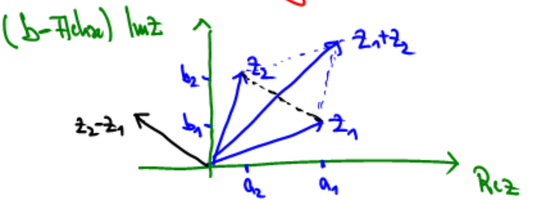
Notizen

wobei $\frac{p^2}{4} - q < 0$ geschrieben wird: $\frac{p^2}{4} - q = i^2\left(q - \frac{p^2}{4}\right)$.

Damit haben wir dann $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

<u>Bsp</u> $x^2 + 4x + 5 = 0$ ergibt sich $x_{1/2} = -2 \pm i$.

Geometrische Deutung komplexer Zahlen $\rightarrow$ Gauß'sche Zahlenebene



$z_1+z_2 = (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$

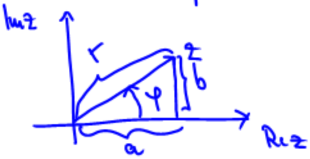
$-(z_1-z_2) = -(a_1-a_2) - i(b_1-b_2)$

$= z_2 - z_1$

Notizen

Wie geht Multiplikation in der komplexen Zahlenebene

$z = a + ib$



$r =$ "Länge" von z

$= |z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$= \sqrt{a^2+b^2}$

$\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}$

$\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)\, i \qquad z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$

mit $a_1 = |z_1|\cos\varphi_1$, $a_2 = |z_2|\cos\varphi_2$, $b_1 = |z_1|\sin\varphi_1$, $b_2 = |z_2|\sin\varphi_2$

ergibt sich (siehe Schule und Additionstheoreme)

$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$

d.h. Beträge von z_1 von z_2 werden multipliziert, die Winkel addiert.

Notizen

Analog ergibt sich die Division (für $z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Hausaufgabe: Interpretieren Sie für $z \neq 0$ die Zuordnung

$z \longmapsto \frac{1}{z}$ geometrisch (Beschreibung durch Spiegelungen).

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

29. Oktober 2015

Notizen

Bsp zur Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

$$\underbrace{(1+i)}_{z_1}+\underbrace{(3+2i)}_{z_2} = (1+3)+i(1+2) = 4+3i$$

$z_1 = a_1 + ib_1 \quad z_2 = a_2 + ib_2$

$a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ a_2 = 3,\ b_2 = 2$

Multiplikation

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

$$(1+i)(3+2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = 1 + i5$$

Division

$$\frac{1+i}{3+2i} = \frac{(1+i)(3-2i)}{13} = \frac{5+i}{13}$$

$$\boxed{\begin{aligned}|z|^2 &= z\bar{z} \\ &= (a+ib)(a-ib) \\ &= a^2+b^2\end{aligned}}$$

Notizen

Mit dem Wissen um $i^2=-1$ können wir jetzt auch jede quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$ lösen:

$x^2+px+q=0$ liefert

$$x_{1/2}=\begin{cases} -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, & \frac{p^2}{4}-q\geq 0 \\ -\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}, & \frac{p^2}{4}-q<0 \end{cases}$$

Bsp von Folie 11 der VL

$x^2+4x+5=0$ $\quad p=4,\ q=5$

$x_{1/2}=-2\pm i$

Damit gilt $x^2+4x+5=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ Zerlegung in Linearfaktoren

<u>Beachte</u>: In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnung in dem Sinne "größer" oder "kleiner"

Notizen

$\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ eingebettet gemäß

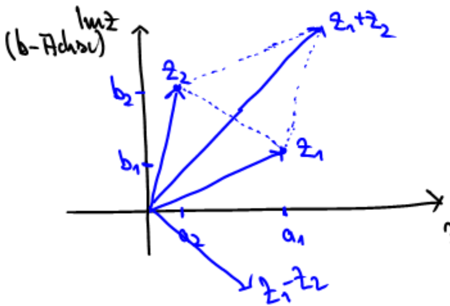
$$s \in \mathbb{R} \longmapsto s + i0 \in \mathbb{C}$$

Geometrische Darstellung komplexer Zahlen, Gauß'sche Zahlenebene

$z = a + ib$

$z_1 = a_1 + ib_1$

$z_2 = a_2 + ib_2$

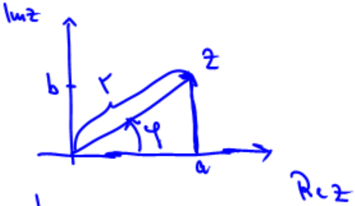


Notizen

Multiplikation von komplexen Zahlen

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ geometrische Deutung?

Dazu Darstellung von $z = a + ib$ in Polarkoordinaten



Wir wissen aus der Schule

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} \qquad \text{mit } r = |z|$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad = \sqrt{a^2+b^2}$$

„Länge" von z

Damit

$$z = a + ib = r\cos\varphi + i r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Darstellung von z in Polarcoordinaten (r, φ).

Notizen

Damit erhalten wir für die Multiplikation $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\right]$$

$$= |z_1||z_2|\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Regel: Beträge multiplizieren, Winkel addieren

Division analog:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Nachweis führen

Notizen

Hausaufgabe: Interpretieren Sie $\frac{1}{z}$ für $z \neq 0$ geometrisch mit Hilfe von Spiegelungen am Einheitskreis bzw an der a-Achse.

Zum Abschluß noch einige Rechenregeln:

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}, \quad z\bar{z} = |z|^2$$