Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

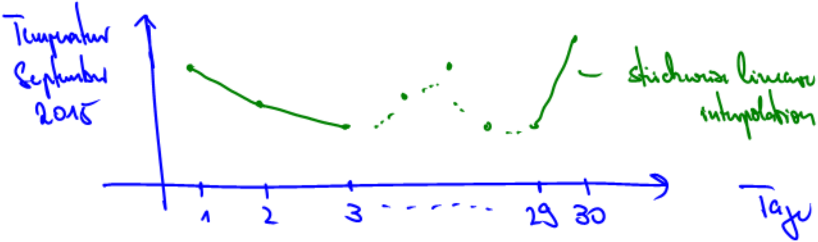
Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

3. November 2015

Notizen

Darstellung von Funktionen $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

1) Graphisch:



2:) Computer Programm

e^x, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(x)$, ...

Notizen

3) Charakterisierung von Funktionen durch Eigenschaften der Funktion

Modellierung des Wachstums einer Bakterienpopulation

Zur Zeit t sei

$$f(t) = \# \text{ Bakterien (etwa in einem Joghurt)}$$

Phänomen: Zunahme der Bakterien im Zeitraum $[t, t+\Delta t]$ ist proportional zu der # Bakterien zum Zeitpunkt t.

Mathematisch: $f(t+\Delta t) - f(t) \sim \underbrace{\Delta t\, f(t)}$ „proportional“

Notizen

bzw $$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \alpha f(t)$$

mit $\alpha > 0$ Proportionalitätskonstante

$$\rightarrow \quad f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \alpha f(t),$$

also erfüllt f die Gleichung $\boxed{f'(t) = \alpha f(t)}$

Zur Zeit t_0 (Anfang der Beobachtung) sei $f(t_0) = \beta$,

d.h. Anfangspopulation der Bakterien habe Größe β (>0)

Notizen

Damit ist f eindeutig festgelegt, nämlich

$$f(t) = \beta \, e^{\alpha(t-t_0)}$$

Hausaufgabe*: a) Wie kann die Beschränktheit der Ressource Joghurt (im Becher) mit modelliert werden?

b) Wachstumshemmer mit modellieren?

4.) Implizite Beschreibung

$$e^{y(x)\,x} = 1 \quad \longrightarrow \quad y(x) = 0 \text{ für } x \neq 0$$

Notizen

Injektiv, surjektiv, bijektiv

i.) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$.

a.) f injektiv? Nein, weil $-1 \neq 1$, aber $f(-1) = f(1)$.

b.) f surjektiv? Ja, denn zu $y \geq 0$ gibt es $x \in \mathbb{R} : y = x^2$, nämlich $x = \pm\sqrt{y}$

c.) f nicht bijektiv, da nicht injektiv

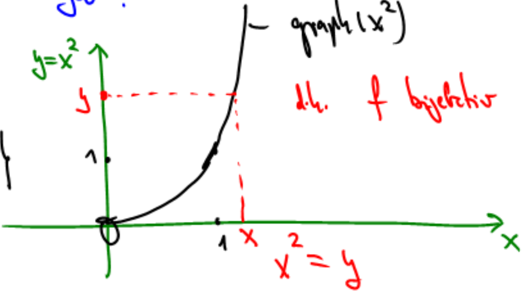
Notizen

ii) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}_0^+$, $W = \mathbb{R}_0^+$

a) f injektiv? Ja!

b) f surjektiv? Ja!

c) f bijektiv



$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x));\ x \in D\}$

als Teilmenge des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Notizen

Frage: Gibt es auch eine "Umkehrfunktion", die jedem y genau ein x zuordnet mit $y = x^2$?

Notation: $y = f(x) = x^2$ $\quad x = \pm\sqrt{y}$, "−" fällt raus, weil $D = \mathbb{R}_0^+$ $\longrightarrow$ $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ Umkehrfunktion

Vertausche noch x und y: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ auf $D = \mathbb{R}_0^+$

Frage: $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 0\}$.
Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

Notizen

Verkettung von Funktionen

i.) $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ mit $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$

$h := g \circ f$, d.h. $h(x) = g(f(x)) = (e^x)^2 = e^{2x}$

$\tilde{h} := f \circ g$, d.h. $\tilde{h}(x) = e^{x^2} \neq h(x)$,

d.h. Verkettung von Funktionen NICHT kommutativ.

ii.) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ $h := g \circ f$

Damit $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$

Notizen

Eigenschaften von Funktionen

1.) Gerade und ungerade Funktionen

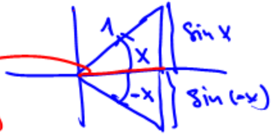
a) $f(x) = x^2$ gerade, weil $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$

b) $f(x) = x^3$ ungerade, weil $f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)$

c) $f(x) = \sin(x)$ ungerade, weil $\sin(x) = -\sin(-x)$

d) $\cos x = \cos(-x)$

$\cos x = \cos(-x)$



$\Rightarrow \sin x = -\sin(-x)$

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

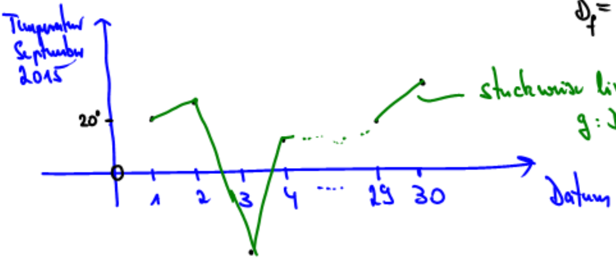
5. November 2015

Notizen

Darstellung von Funktionen $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) Graphisch

$D_f = \{1, 2, \dots, 30\} \subset \mathbb{R}$



stückweise lineare Interpolation

$g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$D_g = [1, 30]$

2) Computerprogramme

$e^x, \ \sin x, \ \cosh x, \ \dots$

Notizen

3) Charakterisierung durch Eigenschaften ($\rightarrow$ Differentialgleichungen)

Kleine Modellierungsaufgabe: Modellierung des Wachstums einer Bakterien-population (etwa in einem Joghurt)

$$f(t) = \#\text{ Bakterien zur Zeit } t$$

Phänomen: Zunahme der Bakterien im Zeit $[t, t+\Delta t]$ proportional zur # Bakterien zum Zeitpunkt t.

Mathematisch:

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \overset{\text{proportional}}{\sim} f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$= \alpha f(t) \qquad \alpha > 0 \text{ Proportionalitäts-konstante}$$

Notizen

Für $\Delta t \to 0$ ergibt sich

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} =: \boxed{f'(t) = \alpha f(t)}$$

Differentialgleichung für f

Beschreibung der Funktion f

Zur Zeit t_0 sei $f(t_0) = \beta$ (Anfangspopulation der Größe $\beta > 0$)

Damit ergibt sich

$$f(t) = \beta e^{\alpha(t-t_0)}$$

Hausaufgabe: $f'(t) = \alpha f(t)$ ist erfüllt.

Wachstumshemmung sei beschrieben durch die Funktion $g(t)$. Dann gilt ($t_0 = 0$)

$$f'(t) = \alpha f(t) - g(t), \quad f(0) = \beta \rightarrow f(t) = e^{\alpha t}\left\{\beta - \int_0^t g(x) e^{-\alpha x}\,dx\right\}$$

Notizen

4.) Implizite Darstellung

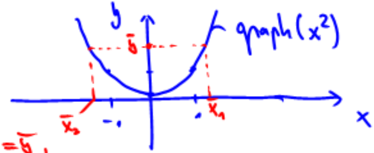
$$e^{y(x)\sin x} - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad y(x) = 0 \quad \forall x,\ \sin x \neq 0$$

Eigenschaften von Funktionen; injektiv, surjektiv, bijektiv

i.) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$

a.) f injektiv? Nein, weil

$f(-1) = f(1) = 1$, aber $-1 \neq 1$



b.) surjektiv? $f(\bar{x}_0) = \bar{y}$ und $f(\bar{x}_1) = \bar{y}$, also ja!

c.) f nicht bijektiv

Notizen

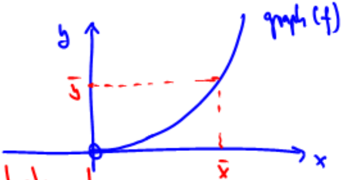
2.) $f(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$, $W = (0,\infty)$ $\quad f: D \to W$ bijektiv.

$f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$. Dann f nicht surjektiv, weil es kein $x \in D$ gibt mit $e^x = 0$ $\quad$ aber f injektiv!

3) Wie 1.), $f(x) := x^2$, $D = \mathbb{R}_0^+$, $W = \mathbb{R}_0^+$: $f: D \to W$ ist dann bijektiv

injektiv, weil $x_1 \neq x_2$

$\to \quad x_1^2 \neq x_2^2$



surjektiv, weil $\tilde{x}$ zu $\tilde{y}$ eindeutig bestimmt

also bijektiv

Notizen

Umkehrfunktion im Fall 3)

$f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$; $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

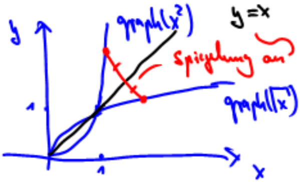
$y \mapsto f^{-1}(y) = x$

falls $y = f(x)$

$y = x^2$

nach x auflösen $\pm\sqrt{y} = x$ nur $+\sqrt{y}$ möglich, weil $x \in \mathbb{R}_0^+$ gelten muß

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ Umkehrfunktion



Vertausche Rolle von x und y

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Notizen

Komposition von Funktionen

$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2$

$h(x) = g(f(x)) = (e^x)^2 = e^{2x} \neq f(g(x)) = e^{x^2}$

ist nicht kommutativ!