Buch Kap. 2.2 – Gerade und Ungerade bei Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei D symmetrisch zur 0 liege, d.h. mit $x \in D$ sei auch $-x \in D$.

Definition 2.7: (gerade und ungerade Funktionen)
f heißt

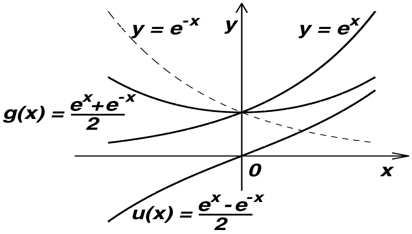
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}, \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{array} \right\}$$

für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Buch Kap. 2.2 – Beispiel gerade und ungerade Funktionen

Jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem um den Punkt $x = 0$ symmetrischen Definitionsbereich D kann man als Summe $f(x) = g(x) + u(x)$ einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u darstellen:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$



$f(x) = e^x$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion

Buch Kap. 2.2 – Beschränktheit bei Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

Definition 2.4: (beschränkte Funktion)

f heißt auf der Menge $M \subset D$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{nach oben}\\ \text{nach unten}\end{array}\right\} \text{ beschränkt, falls } \left\{\begin{array}{l} f(x) \le o \\ f(x) \ge u \end{array}\right\} \text{ für alle } x \in M$$

gilt mit Konstanten $-\infty < u, o < \infty$.

f heißt auf M beschränkt, falls f dort nach oben und nach unten beschränkt ist.

Buch Kap. 2.2 – Monotonie bei Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

Definition 2.5: (monoton fallend und steigende Funktion)

f heißt auf dem Intervall $I \subset D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(streng) monoton steigend} \\ \text{(streng) monoton fallend} \end{array} \right\}, \text{ falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x)(<) \leq f(y) \\ f(x)(>) \geq f(y) \end{array} \right\} \text{ für alle } x, y \in I, x < y$$

erfüllt ist.

Buch Kap. 2.2 – Konkav und Konvex bei Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

Definition 2.6: (konkave und konvexe Funktionen)

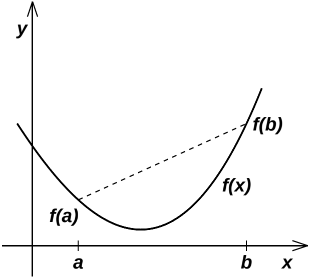
f heißt auf dem Intervall $I \subseteq D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(strikt) konkav} \\ \text{(strikt) konvex} \end{array} \right\}, \text{ falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\alpha x + (1-\alpha)y)(>) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \\ f(\alpha x + (1-\alpha)y)(<) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \end{array} \right\}$$

für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in [0,1]$ erfüllt ist.

Buch Kap. 2.2 – Konkav und Konvex bei Funktionen



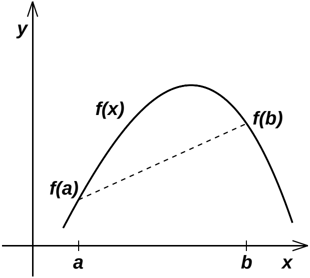


Abb. 2.8 (links): f streng konvex (von unten).
$graph(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ liegt für $a \leq x \leq b$ unterhalb der Geraden durch $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Abb. 2.9 (rechts): f streng konkav (von unten). $graph(f)$ liegt für $a \leq x \leq b$ oberhalb der Geraden durch $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Buch Kap. 2.2 – Periodische Funktionen

Definition 2.8: (periodische Funktion)

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, falls eine Zahl $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$ erfüllt ist, sowie

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

gilt. Die Zahl α heißt Periode der Funktion f.

Die kleinste Periode einer Funktion f, also $\alpha_{min} = \min\{\alpha, \alpha$ Periode von $f\}$ nennt man primitive Periode der Funktion.

Buch Kap. 2.3 – Exponentialfunktion

Exponentialfunktion

$y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0,\ D = \mathbb{R}$.
Ist $a = e$ (Euler Zahl $e = 2{,}71828\ldots$), sprechen wir von der e-Funktion $y = e^x$.

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} &1.)\ a^x a^y = a^{x+y}, \\ &2.)\ (a^x)^y = a^{xy}, \\ &3.)\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}. \end{aligned}$$

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

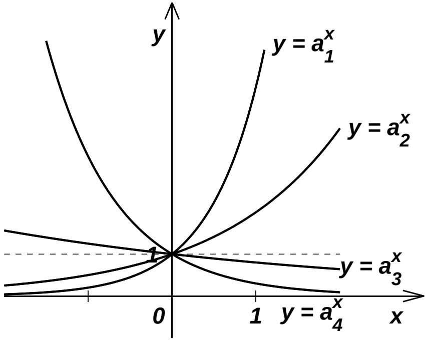


Abbildung 2.11: Exponentialfunktion $y = a^x$ zu Basen a_i ($0 < a_4 < a_3 < 1 < a_2 < a_1$)

Buch Kap. 2.3 – Logarithmus

Logarithmusfunktion

$y = log_a x, \ a \neq 1, \ a > 0, \ D = \mathbb{R}_{>0}$ **definiert als die Zahl** y **mit der Eigenschaft** $a^y = x$.
Ist $a = e$, **definieren wir mit**

$$y = \ln x := \log_e x$$

den natürlichen Logarithmus.

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.
Rechenregeln ($b, c \in \mathbb{R}_{>0}$**)**

$$\begin{aligned} &1.) \ \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \\ &2.) \ \log_a\left(\tfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, \\ &3.) \ \log_a \ b^c = c \ \log_a b. \end{aligned}$$

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

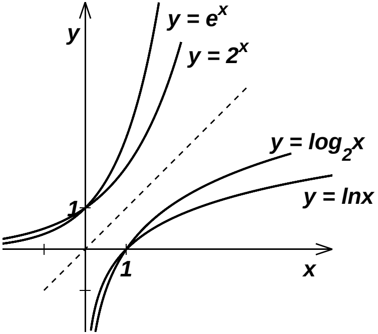


Abbildung 2.12: Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion als deren Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.3 – Potenzfunktion

Potenzfunktion

$$y = x^{\nu}$$

- $\nu \in \mathbb{N}$: **natürlicher Definitionsbereich** $D = \mathbb{R}$;
- $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu < 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\nu \in \mathbb{R}$: $y = x^{\nu} := e^{\ln x^{\nu}} = e^{\nu \ln x}$, $D = \mathbb{R}_{>0}$.

Die Umkehrfunktionen zu $y = x^{\nu}$, $\nu \neq 0$, **sind mit**

$$y = x^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{x}$$

wiederum Potenzfunktionen.

Buch Kap. 2.3 – Trigonometrische Funktionen

4) Trigonometrische Funktionen

$y = \sin x,\ \ y = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, primitive Periode 2π;

$y = \tan x,\ D = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$y = \cot x,\ D = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Einige Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
&\tan x = \tfrac{\sin x}{\cos x},\\
&\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\\
&\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,\\
&\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.
\end{aligned}
$$

5) Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $D = [-1{,}1]$,
$y = \arctan\ x$, $y =$arccot x, $D = \mathbb{R}$.

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Verknüpfung der Grundfunktionen vom Typ 1) bis 5) darstellen lassen, heißen elementare Funktionen.

Beispiele:

1) Polynome (ganz rationale Funktionen)

$$y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0,\ a_k, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

n heißt Grad des Polynoms, a_k $(k = 0, \ldots, n)$ heißen Koeffizienten des Polynoms.

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

2) Gebrochen rationale Funktionen (Polynombrüche)

$$y = \frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

mit den Polynomen $n-$ten bzw. $m-$ten Grades p_n und q_m. Ist $n < m$, heißt y *echt gebrochen* **rationale Funktion oder echter Polynombruch. Für $n \geq m$, heißt y** *unecht gebrochen* **rationale Funktion. Polynomdivision liefert dann**

$$y = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s_{n-m}(x) + r(x),$$

wobei s_{n-m} Polynom vom Grad $n-m$ und r echt gebrochen rational.

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

3) Hyperbelfunktionen

$$
\begin{aligned}
\sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad D = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R},\ \text{ungerade},\\
\cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad D = \mathbb{R},\ W = [1, \infty[,\ \text{gerade},\\
\tanh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad D = \mathbb{R},\ W =]-1,1[,\ \text{ungerade},\\
\coth x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ W = \mathbb{R} \setminus [-1,1],\ \text{ungerade}
\end{aligned}
$$

(sprich: Sinus hyperbolicus, Cosinus hyperbolicus,...).

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

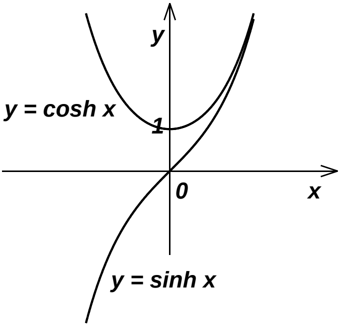


Abbildung 2.13: Hyperbelfunktionen $y = \cosh x$, $y = \sinh x$.

Buch Kap. 2.3 – Area Funktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen Areafunktionen.

$$y = \operatorname{arsinh} x$$

bezeichnet etwa die Umkehrfunktion von $\sinh x$.

Alle Areafunktionen lassen sich explizit durch Logarithmusfunktionen ausdrücken. Es gilt z.B.

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$