Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

10. November 2015

Notizen

Eigenschaften von Funktionen

i.) gerade und ungerade

a.) $f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = f(-x)$, also f gerade

b.) $f(x) = x^3$ $\qquad$ $f(x) = -f(-x)$, also f ungerade

c.) $f(x) = \sin x$ $\qquad$ $f(x) = -f(-x)$, also f ungerade

d.) $f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f(x) = f(-x)$, also f gerade

Merke : $f : D \to \mathbb{R}$ mit D symmetrisch zu . Dann

$f(x) = g(x) + u(x)$ mit g gerade und f ungerade,

Notizen

denn mit

$$g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad u(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

gilt $\quad f(x) = g(x) + u(x) \quad$ und

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x),$$

$$u(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

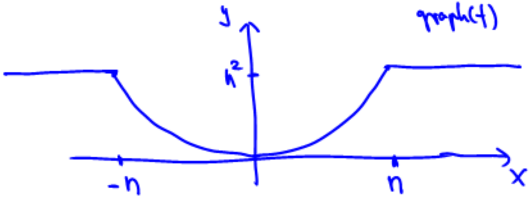
$$= -u(x).$$

Also g gerade und u ungerade!

Notizen

ii) beschränkte Funktionen (Folie 29)

1.) $$f(x) := \begin{cases} x^2, & |x| \leq n \\ n^2, & |x| > n \end{cases} \quad \text{mit } n \geq 0 \text{ fix.}$$



f beschränkt, denn

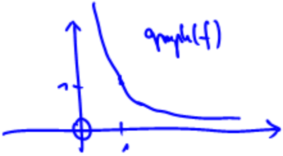
a.) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b.) $f(x) \leq n^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

also f beschränkt.

Notizen

2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,\infty)$



a) f nicht nach oben beschränkt, denn zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in (0,\infty)$ mit $f(x) \geq a$, d.h. $\frac{1}{x} > a \iff x < \frac{1}{a}$

b) $f(x)$ nach unten beschränkt, denn $f(x) \geq 0$ $\forall x \in (0,\infty)$

So gilt auch $f(x) \geq -500$ $\forall x \in (0,\infty)$!

Hier ist die 0 aber die größte untere Schranke an f!

Infimum: $\inf\limits_{x \in D} f(x) :=$ größte Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $f(x) \geq a$ $\forall x \in D$

Supremum: $\sup\limits_{x \in D} f(x) :=$ kleinste Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $f(x) \leq a$ $\forall x \in D$

Notizen

$\inf_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{x} = 0$, $\sup_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{x} = +\infty$

iii) monoton fallend / steigend

1.) $f(x) = \text{const} \in \mathbb{R}$ monoton fallend und steigend

2.) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ monoton steigend, streng

3.) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ weder steigend, noch fallend

aber fallend für $x \le 0$, steigend für $x > 0$, jeweils streng.

iv) konvex / konkav

1.) $f(x) = x^2$ konvex (strikt), denn $\underline{\forall \alpha \in [0,1]}$

$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = (\alpha x + (1-\alpha)y)^2 \overset{!}{\le} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) = \alpha x^2 + (1-\alpha) y^2$,

Notizen

$\alpha x + (1-\alpha) y$ heißt Konvexkombination von x und y

weil

$$(\alpha x + (1-\alpha) y)^2 - \alpha x^2 - (1-\alpha) y^2 = \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha - 1)}_{\leq 0} \underbrace{[x^2 - 2xy + y^2]}_{= (x-y)^2 \geq 0} \leq 0$$

Damit f konvex, strikt, weil "<" für $\alpha \in (0, 1)$ richtig ist für $x \neq y$.

v.) Periodische Funktionen

1.) $f(x) = \sin(\omega x)$, $\omega > 0$ gegeben

Beh.: Jede Zahl $\alpha = \frac{2k\pi}{\omega}$ $(k \in \mathbb{N})$ ist Periode von f,

denn $f(x+\alpha) = \sin(\omega(x+\alpha)) = f(x) = \sin(\omega x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ impliziert

$\omega(x+\alpha) = \omega x + 2k\pi$, d.h. $\alpha = \frac{2k\pi}{\omega}$

Notizen

$\alpha^* := \frac{2\pi}{\omega}$ ist primitive Periode.

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

12. November 2015

Notizen

Gerade und ungerade Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ mit D symmetrisch zur 0

i) $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{R}$ ist gerade, weil

$$f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$$

ii) $f(x) = x^3$ mit $D = \mathbb{R}$ ist ungerade, weil

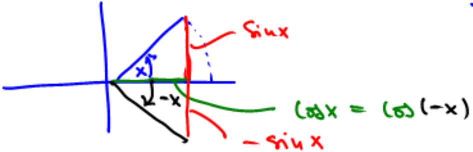
$$f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)$$

Allgemein: x^n $\begin{cases} \text{gerade, falls } n \text{ gerade} \\ \text{ungerade, falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ für $n \in \mathbb{N}$

iii) $f(x) = \sin x$ mit $D = [-\pi/2, \pi/2]$ ist ungerade

Notizen

Denn



Also sin x ungerade,
cos x gerade.

Allgemein $f: D \to \mathbb{R}$ mit D symmetrisch zur 0. Dann

$$f(x) = g(x) + u(x)$$

mit $g(x)$ gerade und $u(x)$ ungerade, denn mit

$$g(x) := \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \quad \text{und} \quad u(x) := \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

Notizen

gilt $f(x) = g(x) + u(x)$ und

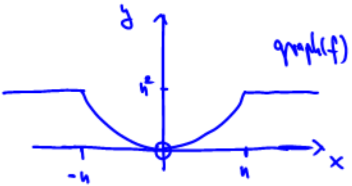
$$g(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(-(-x))\right) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) = g(x)$$

also g gerade; analog

$$u(-x) = -u(x),$$ also u ungerade

Beschränkte Funktionen:

i) $f(x) := \begin{cases} x^2, & |x| \le n \\ n^2, & |x| > n \end{cases}$ n fix



f beschränkt, weil

$f(x) \le n^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ obere Schranke n^2

$f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ untere Schranke 0

Notizen

Beschränktheit von f folgt auch aus

$$f(x) \le \underbrace{n^2 + 8750}_{=:\, o \ (\text{"oben"})} \quad \text{und} \quad f(x) \ge \underbrace{-7815}_{=:\, u}$$

Aber 0 (Null) ist größte untere Schranke von f und n^2 ist die kleinste obere Schranke von f

Definition:

$$\{\pm\infty\} \cup \mathbb{R} \ni \begin{cases} \sup\limits_{x \in D} f(x) := \text{kleinste Zahl } a_s \text{ mit } f(x) \le a_s \ \forall_{x \in D} \\ \qquad \text{Supremum von } f \text{ über } D \\ \inf\limits_{x \in D} f(x) := \text{größte Zahl } a_i \text{ mit } f(x) \ge a_i \ \forall_{x \in D} \\ \qquad \text{Infimum von } f \text{ über } D \end{cases}$$

Notizen

Monotone Funktionen

i.) $f(x) = \text{const}$ (Konstante Funktion)

$x < y \rightarrow f(x) \leq f(y)$ monoton steigend

$\Rightarrow f(x) \geq f(y)$ monoton fallend

ii.) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$ weder noch

Aber $f(x)$ streng monoton $\begin{cases} \text{fallend, falls } x \leq 0 \\ \text{steigend, falls } x \geq 0 \end{cases}$

Konvexe Funktionen

i.) $f(x) = x^2$ ist konvex, denn

$f(\alpha x + (1-\alpha) y) = (\alpha x + (1-\alpha) y)^2 \leq \alpha x^2 + (1-\alpha) y^2 = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$,

Notizen

und

$$(\alpha x+(1-\alpha)y)^2-\alpha x^2-(1-\alpha)y^2 = \underbrace{\alpha}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha-1)}_{\leq 0}[\underbrace{x^2-2xy+y^2}_{\geq 0}] \leq 0$$

für $\alpha \in [0,1]$.

$\alpha x+(1-\alpha)y$ Konvexkombination von x,y

Ausblick: später werden wir für f 2x differenzierbar "konvex" als $f''(x)\geq 0 \ \forall x\in D$ charakterisieren.

Periodische Funktionen

$f(x)=\sin(\omega x)$ $\quad \omega>0$ ist periodisch (mit Perioden $\alpha_k=\frac{2k\pi}{\omega}$, $k\in\mathbb{N}$

weil $\sin(\omega(x+\alpha)) = \sin(\omega x) \longrightarrow \omega(x+\alpha)=\omega x+2k\pi \longrightarrow \alpha=\alpha_k=\frac{2k\pi}{\omega}$

und $\alpha^* = \frac{2\pi}{\omega}$ primitive Periode.