# Buch Kap. 2.4 – Folgen

**Definition 2.12: (Zahlenfolge)**

**Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = f(n)$, die jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt unendliche Zahlenfolge und wird auch mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch kurz mit $(a_n)$ bezeichnet. $a_n$ heißt das $n-$te Glied der unendlichen Zahlenfolge.**

**Bildet $f$ nur jede natürliche Zahl zwischen 1 und $N$ in die Menge der reellen Zahlen ab ($f : \{1,2,\ldots,N\} \to \mathbb{R}$), so erhält man eine endliche Zahlenfolge oder ein $N$-Tupel reeller Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$.**

## Buch Kap. 2.4 – Folgen reeller Zahlen, ein Exkurs

- **Definition 2.13:** $(a_n)$ **heißt** **Nullfolge, wenn wir zu jedem beliebigen** $\epsilon > 0$ **einen Index** $n_0 \in \mathbb{N}$ **finden können, so dass**

$$|a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

**Notation:** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$**, kurz** $\lim a_n = 0$.

- **Definition 2.14:** $(a_n)$ **konvergiert gegen** $a$ **gdw** $(a_n - a)$ **Nullfolge ist.** **Notation:** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$**, kurz** $\lim a_n = a$.
- **Definition 2.15:** $(a_n)$ **heißt** CAUCHY**-Folge, wenn es zu jedem** $\epsilon > 0$ **ein** $n_0 \in \mathbb{N}$ **gibt, so dass**

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall \quad m, n \geq n_0 \quad \text{gilt.}$$

- **Definition 2.17:** $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **mit** $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots \quad (n_k \in \mathbb{N})$ **heißt** **Teilfolge von** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$**. Konvergiert eine Teilfolge gegen** $\xi$**, so heißt** $\xi$ **Häufungspunkt der Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

# Buch Kap. 2.4 – Folgen reeller Zahlen, Exkurs weiter

- **Satz 2.2 (modifiziert): $(a_n)$, $(b_n)$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $a$ bzw. $b$, $\alpha \in \mathbb{R}$.**
  1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,
  2. $\lim \alpha a_n = \alpha \lim a_n$,
  3. $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$,
  4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, falls $b \neq 0$,
  5. $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$.
- **Satz 2.4 (Eigenschaften beschränkter Folgen nach Bolzano-Weierstraß). Dabei $(a_n)$ beschränkt :gdw $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit fixen reellen Zahlen $A$, $B$.**
  1. Jede beschränkte Folge $(a_n)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, oder äquivalent, $(a_n)$ besitzt einen Häufungspunkt,
  2. Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)$ konvergiert.
- **Satz 2.3 (Vollständigkeitsaxiom): $(a_n)$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)$ CAUCHY-Folge ist.**