Buch Kap. 3.1 – Exkurs Reihen

(s_n) mit $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ heißt Reihe.

Notwendig für Konvergenz: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Satz 3.2 (Monotoniekriterium): $a_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und (s_n) beschränkt, dann (s_n) konvergent.

Satz 3.3 (Cauchy Kriterium): (s_n) konvergent gdw es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit, s.d. $|\sum_{i=n+1}^{m} a_i| < \epsilon$ für alle $m > n \geq n_\epsilon$ erfüllt ist.

Satz 3.4 (Leibniz Kriterium): (a_k) sei monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert (s_n) mit $s_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$.

Definition 3.3 (Absolute Konvergenz): (s_n) heißt absolut konvergent, falls (b_n) mit $b_n := \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ konvergiert.

Buch Kap. 3.1 – Exkurs Reihen weiter

Satz 3.7 (Majorantenkriterium): Ist $(s_n) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ absolut konvergent und gilt $|b_i| \leq |a_i|$ für alle $i \geq n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergent.

Satz 3.11 (Quotienten- und Wurzel-Kriterium): $(s_n) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

- **(Quotienten-Kriterium): $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und $\lim\limits_{k \to \infty, k \geq k_0} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = d < \infty$, oder**
- **(Wurzel-Kriterium): $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d < \infty$;**

dann ist (s_n) absolut konvergent, falls $d < 1$ und divergent, falls $d > 1$.

Buch Kap. 2.4 – Grenzwert von Funktionen

Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion über Folgen)

$f : D \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktion.

$f(x)$ strebt für $x \to a$ (von links) {von rechts} gegen g, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D$, $x_n \neq a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (und $x_n < a$, $n \in \mathbb{N}$) {und $x_n > a$, $n \in \mathbb{N}$} schon $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$ gilt.

g heißt (linksseitiger){rechtsseitiger} Grenzwert von f bei a.

Notation:

- **$g = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (g Grenzwert),**
- **$g = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ (g linksseitiger Grenzwert),**
- **$g = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ {g rechtsseitiger Grenzwert}**

Beachte: a muss kein Element von D sein, und g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion f sein.

Buch Kap. 2.4 – Grenzwertwertsätze für Funktionen

Es werden jeweils Grenzwerte für einen der Fälle

$$x \to a, \quad x \to a+0, \quad x \to a-0, \quad x \to \infty, \quad x \to -\infty$$

betrachtet. Falls die entsprechenden Grenzwert $\lim f$, $\lim g$ und $\lim h$ existieren, gelten die Regeln

(i) $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$,

(ii) $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$,

(iii) $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ falls $\lim g \neq 0$,

(iv) $f \leq g \Longrightarrow \lim f \leq \lim g$,

(v) $f \leq g \leq h \wedge \lim f = \lim h = y \Longrightarrow \lim g = y$.

Buch Kap. 2.4 – Grenzwerte von Funktionen

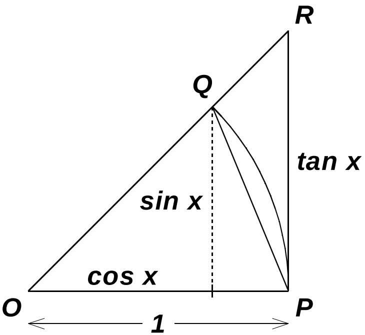

Abbildung 2.21: Skizze zur Grenzwertbetrachtung $\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x}$

Buch Kap. 2.4 – Stetigkeit von Funktionen

Definition 2.18:(Stetigkeit einer Funktion) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt linksseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt rechtsseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.
Die Funktion heißt stetig auf D, falls sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.