

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vertretung für Prof. Hinze: Vorlesung 7

Reihen II, Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

1/3.12.2015

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen).

Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Reelle Zahlenreihen

Wiederholung: Gegeben Zahlenfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Definiere neue Folge

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k .$$

Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dieser **Partialsommen** wird
(unendliche) Reihe genannt.

Man sagt, die **Reihe konvergiere** genau dann wenn die Folge s_n konvergiert. Im Falle der Konvergenz, heißt

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{Grenzwert der Reihe.}$$

BEISPIEL: GEOMETRISCHE REIHE

Bekannt aus Vorlesung 1: Für eine feste reelle Zahl $q \neq 1$ gilt mit

Vorlesung 1

$$\underline{a_k := q^k} : \quad \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Vorlesung 5 / Hii 4

$$q^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \infty & q > 1 \end{cases}$$

divergent für $q \leq -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = \frac{1 - 0}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1$$

sonst divergent

Die geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.

Harmonische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \quad // \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist divergent! Beweis: Cauchy-Kriterium

mit $a_k := \frac{(-1)^k}{k+1}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

ist konvergent: Leibniz Kriterium

aber $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$
divergent

Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$\not\rightarrow$ Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$

\rightarrow Absolut konvergente Reihen : Beamerfolie 48

Definition: eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Folge

$$S_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$$

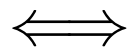
monoton steigend

$$S_{n+1} = S_n + |a_{n+1}| \geq S_n$$

Konvergenzkriterien: Beamerfolie 49

• $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ existiert



Folge $b_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$ beschränkt

Folge ist monoton steigend, also genau dann konvergent, wenn beschränkt

Aus Konvergenz \implies Beschränktheit (s. frühere Vorlesung) 5?

Beschränktheit + Monotonie \implies Konvergenz (Vorl. 5)

• Majorantenkriterium: Folie 49

Gegeben:

absolut konvergente Reihe $s_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverg.

Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $|b_k| \leq |a_k|$ für alle $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$

\implies die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist auch absolut konvergent.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |b_k|}_{\text{endlich viele} =: C} + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k|}_{\leq |a_k|}$$

$$\leq C + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|}_{\text{beschränkt}} < \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \text{ beschränkt}$$

$$\implies \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \text{ konvergent.}$$

BEISPIEL: $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

$$\frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \ominus \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k} =$$

$$\frac{k+1 - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

$$= \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)}$$

$a=1 \quad b=-1$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \ominus \frac{1}{k+1} \right) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \ominus \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \ominus \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ohne Pünktchen: =

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

\downarrow
0

Jetzt: $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} \quad (*)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \quad b_k$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \quad a_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{konvergiert} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{konvergiert} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{konvergiert}$$

Wie sieht es mit $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^m}, m > 2$

Bsp: $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ konvergent}$$

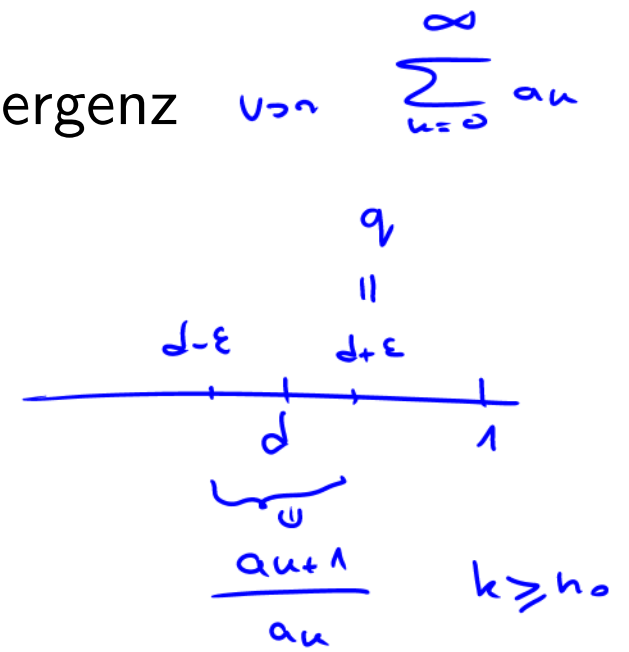
Analog $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \sqrt{k}}$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ oder ...

Ohne Beweis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$

• Quotientenkriterium: Beamerfolie 49

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = d \begin{cases} < 1 & \implies \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \implies \text{Divergenz} \\ = 1 & \implies \text{keine Aussage} \end{cases}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$



Beweis der ersten Aussage:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad \text{für } k \geq n_0$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \iff |a_{k+1}| \leq q |a_k| \leq q \cdot q \cdot |a_{k-1}| \leq \dots \leq q^{k-n_0+1} |a_{n_0}|$$

Beitrag ≤ q · Beitrag (Vorgänger)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k|}_{\text{endlich viele} =: C} + \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| \leq C + |a_{n_0}| \sum_{k=0}^{\infty} q^k = C + |a_{n_0}| \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1$$

• Wurzelkriterium: Beamerfolie 49

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad \text{für } k \text{ groß genug} \implies \sum_{k=0}^n |a_k| \text{ konvergent.}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \iff |a_k| \leq q^k$$

Beispiel:

Wir wissen
(vgl. Folie 3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}}$$

und testen
unsere
Kriterien

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

↑ wissen wir
siehe oben

und testen wieder Quot.krit.

$$a_k = \frac{2^k}{5^k}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{5^{k+1}}}{\frac{2^k}{5^k}}$$

$$= \frac{2^{k+1}}{5^{k+1}} \cdot \frac{5^k}{2^k} = \frac{2^1}{5^1} = \frac{2}{5} = q < 1$$

→ Reihe abs. konvergent
nach Quotientenkriterium

Wurzelkriterium $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(\frac{2}{5}\right)^k} = \frac{2}{5} = q < 1 \implies \text{abs. konv.}$

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = a_{k+1} \cdot \frac{1}{a_k}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{\underbrace{(k+1)(k+2)}_{a_{k+1}}} \cdot \frac{\cancel{k(k+1)}}{\underbrace{1}_{1/a_k}} = \frac{k}{k+2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{k} \cdot 1}{\cancel{k} \left(1 + \frac{2}{k}\right)} = 1 \implies ?$$

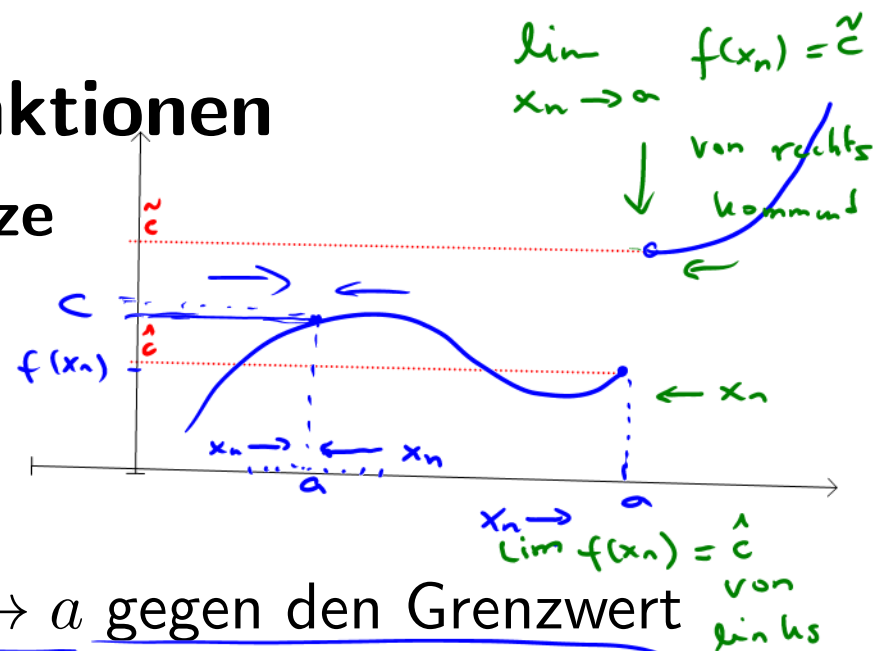
\downarrow
0

Mit Hilfe des
Quotientenkriteriums
ist keine Aussage
möglich

Grenzwerte von Funktionen

Definition: Beamerfolie 50, Prof. Hinze

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$



Man sagt $f(x)$ strebt/ konvergiert für $x \rightarrow a$ gegen den Grenzwert c und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

wenn für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$

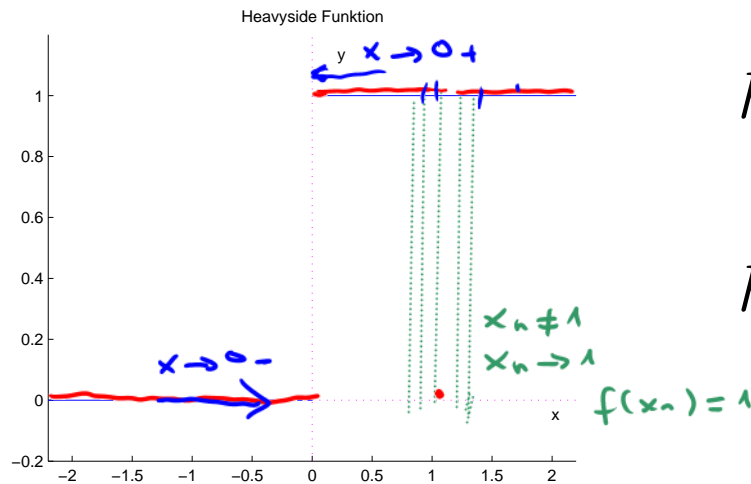
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c \quad \text{gilt.}$$

Linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c.$$

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c.$$

Beispiel 1:



$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0 \neq f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 = f(0)$$

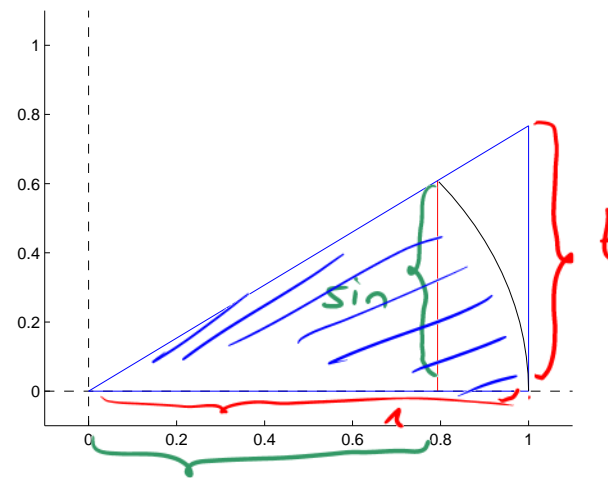
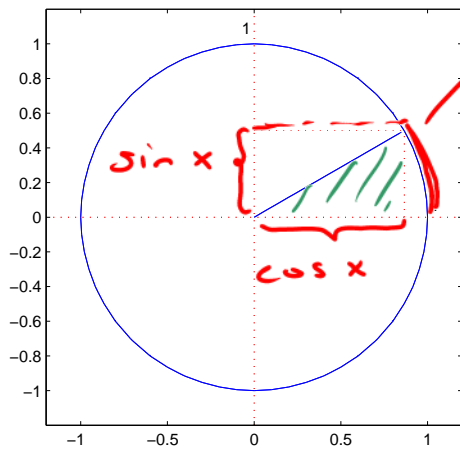
Rechenregeln: Beamerfolie 51, Prof. Hinze

Beispiel 2 Beamerfolie 52, Prof. Hinze:

$$s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, s(x) := \frac{\sin(x)}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

Länge des Bogens = x



Strahlensatz:

$$\frac{t}{1} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Fläche Tortenstück (Sektor)

$$F_3 = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{x}{2}$$

Fläche kleines $\triangle = F_1$

$$= \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{2}$$

Fläche großes $\triangle = F_2$

$$\frac{t \cdot 1}{2} = \frac{\sin(x)}{2 \cos(x)}$$

$$F_1 \leq F_3 \leq F_2$$

$$\left| \frac{\cos(x) \cdot \sin(x)}{2} \right| \leq \left| \frac{x}{2} \right| \leq \left| \frac{\sin(x)}{2 \cos(x)} \right| \quad \left| \frac{2}{\sin(x)} \right|$$

$$|\cos(x)| \leq \left| \frac{x}{\sin(x)} \right| \leq \left| \frac{1}{\cos(x)} \right|$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 0 0 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\cos(x)| \leq \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \right| \leq \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right| \rightarrow 1$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{\sin(x)} \right| \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{\sin(x)} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = 1$$

Nahc $x=0$: Vorzeichen $\sin(x) = \text{Vorzeichen}(x)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} > 0 \quad \text{nahc Null}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Beispiel $h(x)$ von oben:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1) \rightarrow f \text{ ist stetig in } x_0 = -1$$

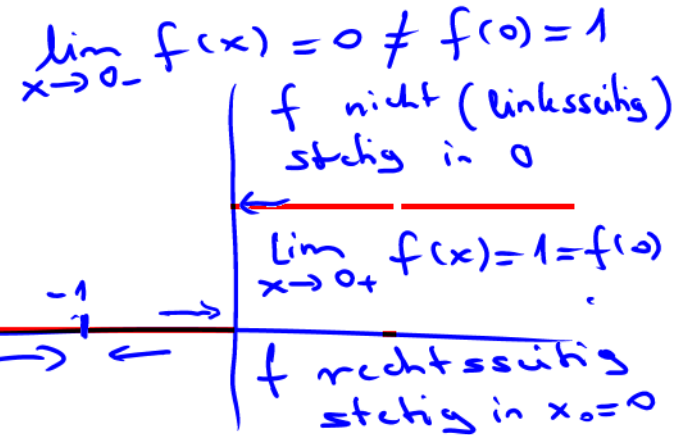
Definition: Beamerfolie 53, Prof. Hinze

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f heißt **stetig** in $x_0 \in D$, wenn

für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt, also g.d.w.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



f heißt **linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig** in $x_0 \in D$, wenn

für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n < x_0$ (bzw. $x_n > x_0$) in D $\neq f(x) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

f weder links- noch rechtsseitig stetig in $x_0 = 1$

Definition: $\epsilon - \delta$ Beamerfolie 54, Prof. Hinze

Beispiele: Beamerfolien 55-59, Prof. Hinze: