Buch Kap. 2.5 – Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 2.7: (Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\bar{y}$ eine beliebige Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es mindestens ein $\bar{x}$ zwischen a und b mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y},$$

d.h. eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert $\bar{y}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Buch Kap. 2.5 – Maximum und Minimum

Definition 2.19: (Maximum und Minimum)

- **Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge. Die kleinste Zahl Zahl s mit $s \geq a$ für alle $a \in A$ heißt Supremum von A, Notation $s = \sup\limits_{a \in A} a$. Die größte Zahl t mit $t \leq a$ für alle $a \in A$ heißt Infimum von A, Notation $s = \inf\limits_{a \in A} a$.**
- **Gibt es $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x)$, so heißt x_0 Maximalstelle, $f(x_0)$ das Maximum von f. Gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$, so heißt x_0 Minimalstelle und $f(x_0)$ Minimum von f.**

Buch Kap. 2.5 – Satz von Weierstrß

Satz 2.9:(Weierstraß)

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und besitzt Maximum und Minimum, d.h. es existieren Elemente $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \; .$$

Jede stetige Funktion nimmt also auf einem abgeschlossenen Intervall Maximum und Minimum an.

Buch Kap. 2.6 – Differenzierbarkeit

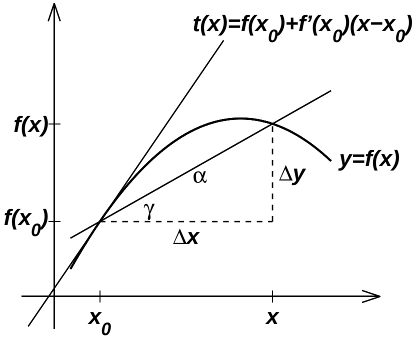

Abbildung 2.30: Sekante und Tangente an f in x_0

Buch Kap. 2.6 – Differenzierbarkeit von Funktionen

Definition 2.21: (Differenzierbarkeit)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und I ein Intervall. f heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ (oder $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$) bezeichnet und <u>Ableitung</u> oder <u>Differentialquotient</u> von f in x_0 genannt.

Analog zur rechtsseitiger (linksseitiger) Stetigkeit werden rechtsseitige (linksseitige) Differenzierbarkeit in x_0 definiert; Ersetze in (2) dafür $x \to x_0$ durch $x \to x_0 + 0(-0)$ und $\Delta x \to 0$ durch $\Delta x \to 0 + 0(-0)$.

Buch Kap. 2.6 – Differenzierbarkeit von Funktionen

Definition 2.23, 2.26: (Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit auf $I \subset D$)

- **Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $I \subset D$ differenzierbar, wenn f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist, und in jedem zu I gehörigem Randpunkt einseitig differenzierbar ist.**
- **Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $I \subset D$ stetig differenzierbar, falls sie dort differenzierbar ist und die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.**

Buch Kap. 2.6 – Differenzierbarkeit von Funktionen

Satz 2.10: (Differenzierbarkeit $\Longrightarrow$ Stetigkeit)

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierbar, so ist sie an der Stelle x_0 auch stetig.

Buch Kap. 2.6 – Differentiationsregeln

Seien f und g differenzierbare Funktionen. Die Ableitung einer Funktion f wird durch f' bezeichnet.

(i) **Ableitung von Summe, Produkt und Quotient**
$(f+g)' = f' + g'$
$(c \cdot f)' = cf'$ **(c reelle Konstante)**
$(fg)' = f'g + fg'$ **(Produktregel)**
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, **falls $g \neq 0$ (Quotientenregel)**

(ii) **Kettenregel**
$(f \circ g(x))' = (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

(iii) **Ableitung der Umkehrfunktion**
Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, dann gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$