Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

5. Januar 2016

~~17.~~ Dezember ~~2015~~

Universität Hamburg

Notizen

Höhere Differenzierbarkeit

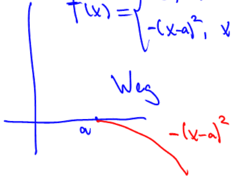
Sei f diffbar. Dann gibt es $f'(x)$. Setze $g(x) := f'(x)$.

Ist g diffbar, heißt f 2mal diffbar mit $f''(x) = f^{(2)}(x) := g'(x)$.

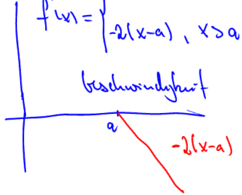
Analog für n-malige Differenzierbarkeit //

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ -(x-a)^2, & x > a \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ -2(x-a), & x > a \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ -2, & x > a \end{cases}$$

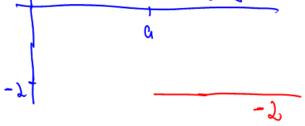
Weg



Geschwindigkeit



Beschleunigung



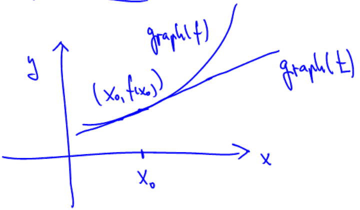
f nur einmal stetig diffbar!

Notizen

Sei $f(x) := \max(0,x)^n = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^n, & x > 0 \end{cases}$. Dann ist f $(n-1)$-mal stetig diffbar

Differenzierbarkeit und das lineare Modell

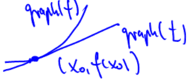
$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$



Idee: Tangente bei x_0 ist gutes Modell für die Funktion f bei x_0 (lokal bei x_0)

Warum?

Studiere Situation lokal (d.h. in der Nähe von) x_0



Notizen

Wir haben

$$\frac{f(x)-t(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} 0, \quad \text{weil } f \text{ diffbar in } x_0$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0) \qquad \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)$$

d.h. für $k(x) := f(x)-t(x)$ gilt $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{k(x)}{x-x_0} = 0$,

d.h. $k(x)$ nähert sich der Null schneller als $x-x_0$ für $x \to x_0$

Nun gilt

$$f(x) = t(x) + \underbrace{k(x)}_{\text{„sehr klein (kleiner als } x-x_0) \text{ in der Nähe von } x_0\text{"}}$$

Merke: Lokal kann das komplexe Modell f durch lineares Modell „gut" dargestellt werden

einfaches Modell!

Notizen

Bsp i.) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = e, \quad t(x) = \ln e + \frac{1}{e}(x-e) = 1 + \frac{1}{e}(x-e)$

Sei $x = 3$. $\quad f(3) = 1.09861 \qquad t(3) = 1.10364$

$$k(3) = f(3) - t(3) = -0.005$$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ $\qquad$ Sei $x_0 = 0$. Dann $t(x) = 1$ und

$\cos x = t(x) + k(x)$ mit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{k(x)}{x} = 0$

Damit

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - t(x) - k(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - k(x)}{x}$$

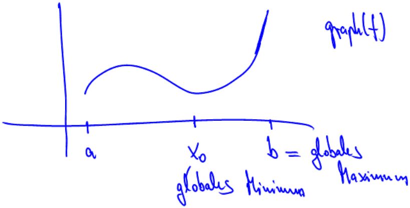
$$= 0 + \lim_{x\to 0} \frac{-k(x)}{x} = 0$$

Notizen

Charakterisierung von Extremalstellen diffbarer Funktionen

Bei x_0 gilt $f'(x_0) = 0$, denn

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \leq 0 & x < x_0 \\ \geq 0 & x > x_0 \end{cases}$$



f diffbar in x_0, also $\underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{= f'(x_0)} = 0$

Bei b können wir nur linksseitige Grenzwerte betrachten:

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geq 0 \longrightarrow f'(b) \geq 0$$

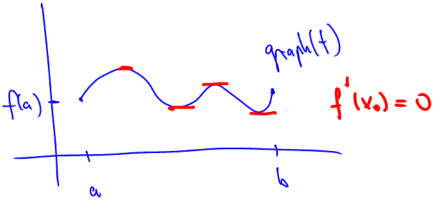
Analog, falls bei a globales Minimum vorliegt: $f'(a) \geq 0$

Diese Betrachtungen können auch lokalisiert werden, d.h. "global" darf durch "lokal" ersetzt werden

Notizen

Folgerungen

Satz von Rolle: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diffbar. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



Nachweis: $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

i.) $m = M \Rightarrow f(x) = \text{constant}$

also $f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in [a,b]$

ii) $m < M$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit $M = f(x_0)$ (ohne Einschränkung).

Nach obigen Überlegungen ist dann aber $f'(x_0) = 0$!

Notizen

Wende Satz Rolle auf $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ an.

Dann $g(a) = 0$, $g(b) = 0$, also ex $x_0 \in (a,b)$ mit

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

d.h. es gibt $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Mittelwertsatz

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

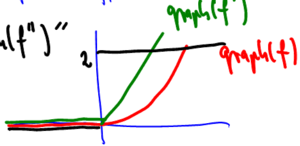
Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

7. Januar 2016

Notizen

Höhere Differenzierbarkeit: ist f' diffbar, so heißt f 2mal diffbar mit 2ter Ableitung $f''(x)$. Analog f n-mal diffbar, falls $f^{(n-1)}$ diffbar.

Bsp: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

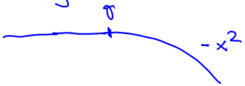


$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

" $f''(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ "

Sei $f(x) = \max(0,x)^n$. Dann f $(n-1)$ mal stetig diffbar.

Weg



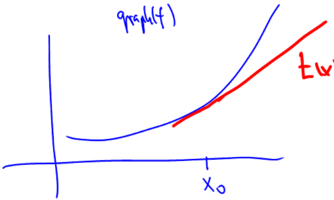
Geschwindigkeit = Weg'

Beschleunigung = Geschw.'

Notizen

Das lineare Modell einer diffbaren Funktion

graph(t)



$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Ist f diffbar bei x_0, dann ist t ein „gutes" Modell für f „in der Nähe" von x_0.

Warum?

Betrachte Differenz $f(x) - t(x)$

$$R(x) := f(x) - t(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \longrightarrow 0 \quad (x \to x_0)$$

Betrachte

$$\frac{R(x)}{x-x_0} = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)} - \underbrace{f'(x_0)\,\frac{x-x_0}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)\ (x\to x_0)} \longrightarrow 0 \quad (x \to x_0)$$

Notizen

D.h. $k(x)$ konvergiert schneller gegen 0 also $x-x_0$.

$$f(x) = t(x) + \underbrace{k(x)}$$

sehr klein in der Nähe von x_0, nämlich kleiner als $x-x_0$

$\longrightarrow$ $f(x) \sim \underbrace{t(x)}$ in der Nähe von x_0.

lineares Modell von f bei x_0

Beispiele

i) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$. Dann $t(x) = \ln e + \frac{1}{e}(x-e) = 1 + \frac{1}{e}(x-e)$

Sei $x = 3$: $f(3) \approx t(3)$; $k(3) = -0.005$

$f(3) = 1.09861 \approx 1.10364 = t(3)$; $x - x_0 = 3 - e \approx 0.28\ldots$

ii) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Dann $t(x) = 0 + 1(x-0) = x$

Notizen

Betrachte $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t(x)+k(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{k(x)}{x}\right) = 1 + \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{k(x)}{x}}_{=0} = 1$

iii) $f(x)=\cos x$, $x_0=0$. Dann $t(x)=1$. Daher

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-t(x)-k(x)}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{k(x)}{x} = 0.$$

Extremalstellen von differenzierbaren Funktionen. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diffbar und nehme bei x_0 ihr Minimum und bei x_1 ihr Maximum an.

Sei $x_0\in(a,b)$. Dann gilt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\begin{cases}\geq 0, & x>x_0\\ \leq 0, & x<x_0\end{cases} \longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = 0.$$

Analog für $x_1\in(a,b)$!

Universität Hamburg

Notizen

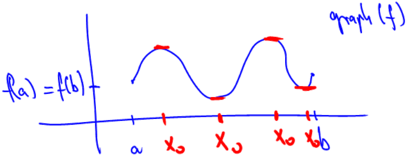
Sei nun OE $x_0 = b$. Dann

$$\frac{f(x)-f(\overset{=b}{x_0})}{x-b} \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \le 0$$

Andere Fälle analog!

Der Satz von Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diffbar mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.



Nachweis: Sei $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$, $M := \max_{x \in [a,b]} f(x)$ und sei $f(x_0) = m$, $f(x_1) = M$

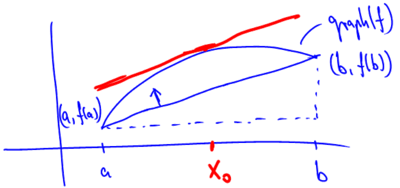
i) $M = m$. Dann $f(x)$ konstant mit Wert $f(a)$. Dann $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$

ii) $M > m$. Dann OE $x_0 \in (a,b)$. Dann muß aber $f'(x_0) = 0$ gelten, siehe oben.

Notizen

Folgerung aus dem Satz von Rolle; der Mittelwertsatz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diffbar. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Nachweis: Betrachte

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dann ist g auf $[a,b]$ stetig, auf (a,b) diffbar und es gilt $g(a) = 0 = g(b)$. Also gibt es nach dem Satz von Rolle $x_0 \in (a,b)$ mit

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{, d.h. } f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$