Buch Kap. 2.8 – Regeln von Bernoulli-l'Hospital

Satz 2.18: **Seien $I = (a, b)$, $x_0 \in [a, b]$, $U(x_0)$ eine Umgebung von x_0. $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ seien zwei für alle $x \in U(x_0) \cap I$, möglicherweise mit Ausnahme von x_0, differenzierbare Funktionen. Weiter sei**

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in I} g(x) = 0, \ \infty \text{ oder } -\infty \, .$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$. Gilt dann

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

(d.h. der Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert), so ist

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, .$$

Einseitige Grenzwerte für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ sind eingeschlossen.

Buch Kap. 2.8 – Regeln von Bernoulli-l'Hospital

Fortsetzung Satz 2.18: Sind f, g zwei für $x \in [A, \infty)$ bzw. $(-\infty, B]$ definierte, differenzierbare Funktionen, ist $g'(x) \neq 0$ für diese x und ist

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ \text{bzw. } x \to -\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ \text{bzw. } x \to -\infty}} g(x) = 0, \ \infty \text{ oder } -\infty \, .$$

so gilt

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ \text{bzw. } x \to -\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to \infty \\ \text{bzw. } x \to -\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, ,$$

falls der zuletzt hingeschriebene Grenzwert existiert oder gleich ∞ oder $-\infty$ ist, und $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$ im Fall $g(x) \to 0$ bzw $g(x) \neq 0$ für $x \geq M$ $(\leq -M)$ mit M groß genug, falls $g(x) \to +\infty$ $(-\infty)$.