Buch Kap. 2.9 – Taylor Polynom

Definition 2.27: (Taylor-Polynom)

Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heißt Taylor-Polynom $n-$ten Grades für die Funktion f bei der Entwicklungsstelle x_0.

Die Kurven von $y = T_n(x)$ heißen Schmiegeparabeln an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Buch Kap. 2.9 – Schmiegeparabeln

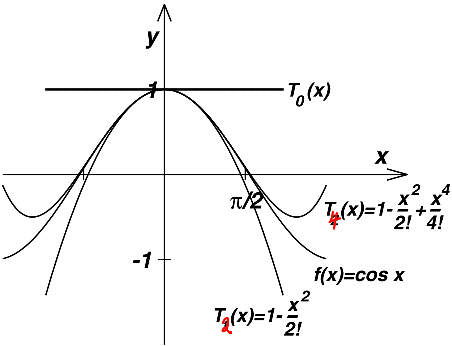


Abbildung 2.36: Taylor-Polynome (Schmiegparabeln) $T_0(x)$, $T_2(x)$, $T_4(x)$ für die Funktion cos x bei $x_0 = 0$

Buch Kap. 2.9 – Satz von Taylor

Satz 2.21: (Satz von Taylor)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ der Entwicklungsstelle x_0 $(n+1)-$mal stetig differenzierbar und es gelte $p \in \{1,2,\ldots,n+1\}$. Dann gibt es zu jedem $x \in U_\delta(x_0)$ eine Zahl ξ zwischen x und x_0 derart, dass mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n+1-p}$$

für die Funktion f die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

gilt. Die Funktion $R_n(x)$ heißt Restglied in der Schlömilch-Form.

Buch Kap. 2.9 – Taylor Formel

Satz 2.20: (Polynomdarstellung)

Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ in der Form

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$$

darstellen, wobei

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

gilt.

Buch Kap. 2.10 – Extremalprobleme

Definition 2.28: (lokale oder relative Extrema)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt im Intervall I in x_0 ein <u>lokales Maximum (Minimum)</u>, falls es eine $\epsilon-$Umgebung $U_\epsilon(x_0)$, so daß

$$f(x_0) \geq (\leq)\ f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U_\epsilon(x_0)$$

gilt. x_0 heißt eine lokale Maximalstelle (Minimalstelle), und die Zahl $f(x_0)$ heißt lokales Maximum (Minimum).

Gilt sogar $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$), so heißt x_0 echte lokale Maximalstelle (Minimalstelle) und $f(x_0)$ echtes lokales Maximum (Minimum). Anstelle von "lokal" sagen wir auch "relativ".

Buch Kap. 2.10 – Extremalprobleme

Satz 2.22: (notwendige Bedingung nach Leibniz), vergl. Satz 2.14

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer auf I differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

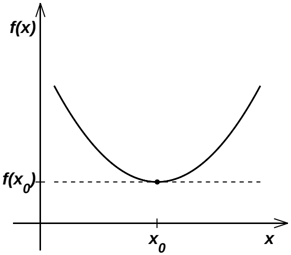
$$\text{a)}\quad f'(x_0) = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b)}\quad x_0 \ \text{ ist Randpunkt von } \ I.$$

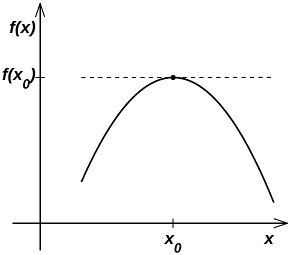
Ist x_0 lokale Maximalstelle (Minimalstelle), so gilt

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq 0 \ (\geq 0) \text{ für alle } x \text{ in einer Umgebung von } x_0,$$

Hierbei handelt es sich um einfache Formen von sogenannten Variationsungleichungen.

Buch Kap. 2.10 – Extremalprobleme





Links: Abb. 2.37 mit von unten konvexer Kurve ($f'' > 0$) und Minimum bei $x = x_0$, Rechts: Abb. 2.38 mit von unten konkaver Kurve ($f'' < 0$) und Maximum bei x_0.

Buch Kap. 2.10 – Extremalprobleme

Satz 2.23: (hinreichende Bedingung für relative Extrema)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Falls

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0 \; (f''(x_0) < 0)$$

erfüllt ist, dann hat f an der Stelle x_0 ein relatives Minimum (Maximum).

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann liegt mit dem Punkt x_0 ein horizontaler Wendepunkt vor.