Buch Kap. 2.11 – Banachscher Fixpunktsatz

Definition 2.29: (Fixpunkt)

Sei $f : I \to I$ eine Funktion, welche das reelle Intervall I in sich abbildet, d.h. $f(I) \subset I$. Jede Lösung $\bar{x}$ der Gleichung

$$x = f(x)$$

heißt Fixpunkt von f. Diese Gleichung wird daher auch Fixpunktgleichung genannt.

Buch Kap. 2.11 – Banachscher Fixpunktsatz

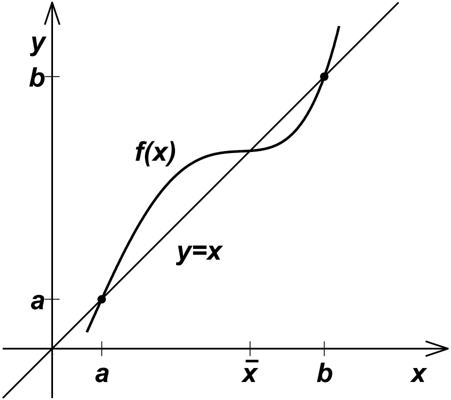

Abbildung 2.39: Fixpunkte von *f*.

Buch Kap. 2.11 – Banachscher Fixpunktsatz

Satz 2.24: (Banachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$)
Sei $f : I \to I$ eine reellwertige Funktion, die ein abgeschlossenes Intervall I in sich abbildet. Weiterhin gelte für alle $x_1, x_2 \in I$ die Ungleichung

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

mit einer von x_1, x_2 unabhängigen Konstanten $0 \leq K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch

$$x_{n+1} = f(x_n) \ (n \in \mathbb{N})$$

definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.
Ferner gilt für die Folgenglieder x_n

- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$ **(a-priori Abschätzung),**
- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1} - x_n|$ **(a-posteriori Abschätzung).**

Buch Kap. 2.11 – Newton-Verfahren

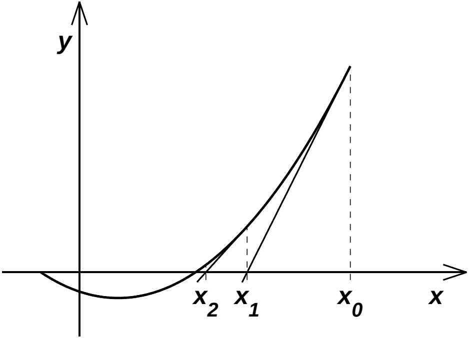

Abb. 2.40: Newton-Verfahren verwendet das lineare Modell