Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

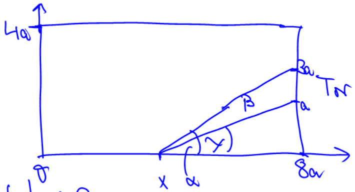
Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

26. Januar 2016

Notizen

Anwendung: Optimaler Sitzplatz auf Haupttribüne im Fußballstadion

$$\beta = \beta(x) = \alpha(x) - \gamma(x) = \arctan\frac{3a}{8a-x} - \arctan\frac{a}{8a-x}$$



β soll möglichst groß sein! Bestimme optimales x. $\beta = \alpha - \gamma$

Bestimme x, so dass $\beta(x)$ möglichst groß.

$$\beta'(x) = 0 \iff \frac{3a}{(8a-x)^2+9a^2} - \frac{a}{(8a-x)^2+a^2} = 0$$

$\Longrightarrow \quad x_{1/2} = 8a \pm \sqrt{3}\,a$ nur x_2 kommt in Frage, weil $x_1 > 8a$. Also $x = (8-\sqrt{3})a$. $\beta''(x) = \beta''((8-\sqrt{3})a) = -\frac{\sqrt{3}}{12a^2} < 0$, also $x = (8-\sqrt{3})a$ Stelle, wo $\beta(x)$ maximal.

Notizen

Praxis: Nullstellenberechnung von Funktionen sehr wichtig!

i) $f(x) = 0$

ii) $f'(x) = 0$

iii) $f''(x) = 0$

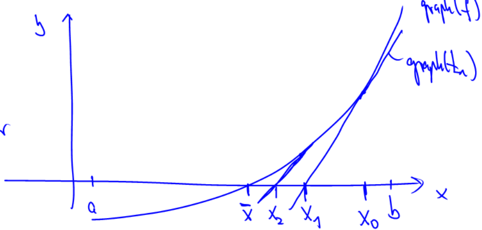
typische Aufgaben, die nach der Modellierung des physikalischen Prozesses (mit Resultat f) auftauchen.

Sei f nun 2mal stetig diffbar. Wir wollen Nullstelle von f ausrechnen

$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ es gibt $\bar{x} \in (a,b)$ mit $f(\bar{x}) = 0$

$\bar{x}$ i.d.R. nicht explizit bestimmbar

$\Rightarrow$ Numerische Methode mit Hilfe des linearen Modells



Notizen

Idee: Bestimme ausgehend von der Schätzung x_0 eine Nullstelle x_1 des linearen Modells $t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

$$0 = t_1(x_1) \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{falls } f'(x_0) \neq 0).$$

Vertausche Rollen von x_1 und x_0 und bestimme Nullstelle x_2 von

$$t_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0 \iff x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Idee: iteriere diesen Prozeß

x_0 gegeben, $n := 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = n+1$$

Stop, falls x_n "nahe genug an $\bar{x}$"

Dies ist das s.g. Newton Verfahren zur Berechnung von Nullstelle von f.

Notizen

A: Die Folge (x_n) des Newton Verfahrens konvergiert, also $x_n \longrightarrow \bar{x}$ für $n \to \infty$. Dann

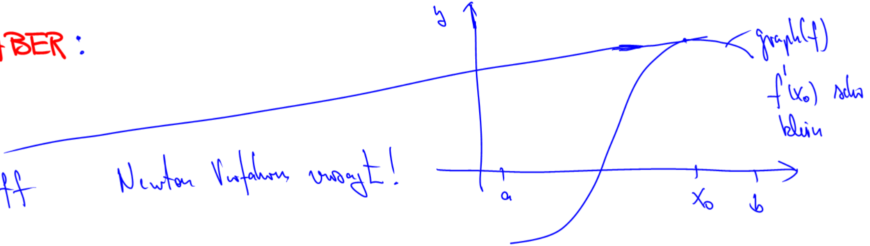
$$\bar{x} \xleftarrow{n\to\infty} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

falls f stetig diffbar

d.h. $\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \Longleftrightarrow f(\bar{x}) = 0$ (falls $f'(\bar{x}) \neq 0$),

d.h. $\bar{x}$ ist Nullstelle von f!

ABER:



Oft Newton Verfahren versagt!

Notizen

Newton Verfahren ist eine spezielle Fixpunkt Iteration. Sei zu gegeben f

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \text{mit } f'(x) \neq 0 \quad \forall x$$

$g(\bar{x}) = \bar{x} \iff f(\bar{x}) = 0$, d.h. $\bar{x}$ ist Fixpunkt von g.

Das Newton Verfahren ist dann die Fixpunkt Iteration

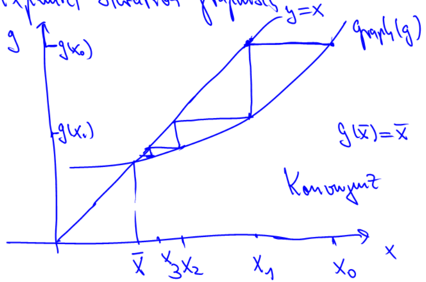
x_0 gegeben, $n = 0$

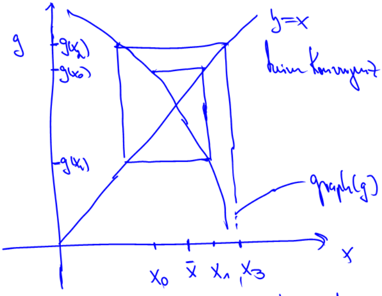
$x_{n+1} = g(x_n)$, $n = n+1$

Frage: Unter welchen Voraussetzungen können wir garantieren, dass eine solche Fixpunktiteration gegen einen Fixpunkt von g konvergiert?

Notizen

Fixpunkt Iteration graphisch





$x_1 = g(x_0)$ Fixpunkt $\bar{x}$ anziehend Fixpunkt $\bar{x}$ abstoßend

Satz Sei $g: I \longrightarrow I$ mit $g(I) \subset I$ Selbstabbildung und g sei eine Kontraktion, d.h. g ist Lipschitz stetig mit Konstante $0 \le K < 1$, d.h. $|g(s) - g(t)| \le K\,|s-t| \quad \forall s,t \in I$.

Notizen

Dann

i.) besitzt g einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$, d.h. es gibt $\bar{x} \in I$ mit $g(\bar{x}) = \bar{x}$!

ii.) Für jeden Startwert $x_0 \in I$ konvergiert die Folge $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = n+1$ gegen einen Fixpunkt $\bar{x}$.

iii.) $\bar{x}$ ist eindeutig bestimmt in I

iv.) Es gelten die Fehlerabschätzungen

a.) $|\bar{x} - x_n| \le \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$ a priori Abschätzung

b.) $|\bar{x} - x_n| \le \frac{1}{1-K} |x_{n+1} - x_n| \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$ a posteriori Abschätzung

Beispiel: $g(x) := \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}$. Dann gilt mit $I := [0,1]$: $g(I) \subset I$, weil $g(0) = \frac{1}{5}$, $g(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} > \frac{1}{5}$ und $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 > 0$ in I, also g streng monoton

Notizen

wachsend. D.h. $g(I) \subset [\frac{1}{5}, \frac{9}{20}] \subset [0,1] = I$. Also g Selbstabbildung.

g ist Kontraktion, weil mit ξ zwischen s und t

$$|g(s) - g(t)| = |g'(\xi)||s-t| = \frac{3}{4}\xi^2 |s-t| \leq \frac{3}{4}|s-t| \text{ für } s,t \in [0,1].$$

D.h. $K = \frac{3}{4}$. Also gibt es genau ein $\bar{x} \in [0,1]$ mit $g(\bar{x}) = \bar{x}$!

$\bar{x}$ ausrechnen: Wie oft muß ich höchstens mit meiner Fixpunkt Iteration

I $\exists\, x_0$ gegeben, $x_{n+1} = g(x_n)$ iterieren, damit zur gegebenen Toleranz tol so

$$|x_n - \bar{x}| \leq tol \quad \text{gilt?}$$

Mit der Fehlerabschätzung a) gilt: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0| \overset{!}{\leq} tol$

$$\Longrightarrow \quad n \geq \left(\ln \frac{tol\,(1-K)}{|x_1 - x_0|}\right) / \ln K$$

Hier: $\quad n \geq \frac{40\, tol}{43 \ln \frac{3}{4}}$.

Analysis handschriftliche Folien

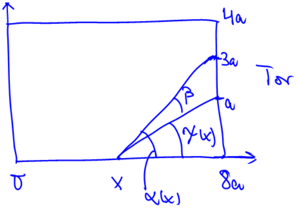
Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

28. Januar 2016

Notizen

Wo befindet sich der beste Platz auf der Haupttribüne des Volksparkstadions, um Adler's vergebliche Bemühungen, die Fehler seiner Vorderleute auszubügeln, am besten beobachten zu können?



$\beta = \beta(x)$ soll möglichst groß sein

$$\beta(x) = \alpha(x) - \gamma(x)$$

$$= \arctan\frac{3a}{8a-x} - \arctan\frac{a}{8a-x}$$

β diffbar und

$$\beta'(x) = \frac{3a}{(8a-x)^2+9a^2} - \frac{a}{(8a-x)^2+a^2} \overset{!}{=} 0$$

liefert $x_{1/2} := (8 \pm \sqrt{3})a$. Nur $x_2 = (8-\sqrt{3})a$ kommt in Betracht. Ferner $\beta(x_2)$ maximal aus anschaulichen Überlegungen. Es gilt aber auch $\beta''(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{12a^2} < 0$, also x_2 lokale Maximalstelle.

Notizen

Nullstellenberechnung praktisch; mit Hilfe des linearen Modells

Motivation: finde $\bar{x}$ mit $f(\bar{x}) = 0$ bzw $f'(\bar{x}) = 0$ bzw $f''(\bar{x}) = 0$

Dilemma: Nullstellen können i.d.R. nicht explizit angegeben werden!
z.Bsp falls $f(x)$ durch Computer Programm realisiert wird

Ausweg: Nutze einfaches Modell für f zur näherungsweise Berechnung von Nullstellen.

Sei f 2mal stetig diffbar. Dann bei x_0

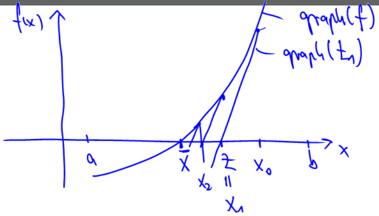
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{=: t_1(x) \equiv t_1(x;x_0)} + R_1(x) \qquad \text{mit } R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

ξ zwischen x und x_0

Ziel: finde $\bar{x}$ mit $f(\bar{x}) = 0$

Idee: finde z mit $t_1(z;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(z-x_0) = 0$. Dann $z = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Notizen



Was hat z mit $\bar{x}$ zu tun?

z ist "gute" Näherung für $\bar{x}$, falls x_0 nahe bei $\bar{x}$ (Expertenwissen!), denn dann ist $t_1(\cdot\,; x_0)$ gute Näherung von f bei x_0, also auch bei $\bar{x}$.

Es gilt $f(z) = \dfrac{f''(\xi)}{2 f'(x_0)^2} f(x_0)^2$

2-Idee: iteriere dieses Verfahren; z soll in die Rolle von x_0 schlüpfen.

Dann berechne neues $z = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Algorithmisch: x_0 gegeben, $n=0$

$$\left.\begin{aligned} & x_0 \text{ gegeben}, \ n = 0 \\ & x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = n+1 \end{aligned}\right\} \text{ Newton Verfahren}$$

TA (x_n) konvergiert, also $x_n \to \bar{x}$ $(n \to \infty)$. Dann $f(\bar{x}) = 0$.

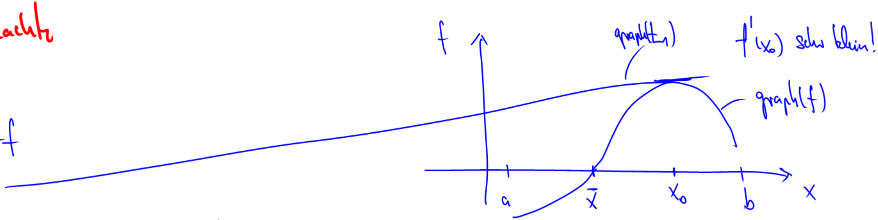
Notizen

Denn $\quad \bar{x} \xleftarrow{n\to\infty} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$

d.h. $\quad \bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \iff f(\bar{x})$, falls $f'(\bar{x}) \neq 0$

Beachte

Off



Newton Verfahren gehört zur Klasse der Fixpunktiterationen. Denn sei

$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, so lautet das Newton Verfahren $\quad x_0$ geg., $n = 0$

$x_{n+1} = g(x_n)$.

Notizen

Dies ist eine Fixpunktiteration zur Lösung von

$\bar{x} = g(\bar{x})$ ($\bar{x}$ Fixpunkt von g, $\bar{x}$ Fixpunkt)

Frage: unter welchen Bedingungen konvergiert eine Fixpunktiteration für g gegen einen Fixpunkt $\bar{x}$ von g?

Satz (Banach'scher Fixpunktsatz). Sei $I = [a,b]$ und $g: I \to I$ mit $g(I) \subset I$ (Selbstabbildung). Ferner erfülle g für alle $s, t \in I$

$$|g(s) - g(t)| \le K\,|s-t| \quad \text{mit} \quad 0 \le K < 1 \quad \text{(Kontraktionskonstante)},$$

d.h. g ist Lipschitz stetig mit Konstante $0 \le K < 1$ und heißt "Kontraktion".

Dann gilt

i.) g besitzt in I genau einen Fixpunkt $\bar{x}$, d.h. $g(\bar{x}) = \bar{x}$

ii.) Für jedes $x_0 \in I$ konvergiert die Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ gegen $\bar{x}$.

Notizen

iii) Es gelten die Fehlerabschätzungen

a) $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$ (a priori Abschätzung)

b) $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-k} |x_{n+1} - x_n| \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$ (a posteriori Abschätzung).

Aus a) folgt: ist $tol > 0$ eine vorgelegte Fehlertoleranz für $|x_n - \bar{x}|$, so sollte $n \geq \left(\ln \frac{tol\,(1-k)}{|x_1 - x_0|} \right) / \ln k$ gewählt werden. Dann gilt sicher $|x_n - \bar{x}| \leq tol$

Bsp: $g(x) = \frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{5}$, $I = [0,1]$. Dann gilt $g(I) \subset I$, weil $g'(x) = \frac{3}{4} x^2 \geq 0$, also g monoton. Ferner $g(0) = \frac{1}{5}$ und $g(1) = \frac{9}{20}$. Also $g(I) = [\frac{1}{5}, \frac{9}{20}] \subset I$.

Notizen

g Kontraktion, denn

$$|g(s)-g(t)| = |g'(\xi)|\,|s-t| = \frac{3}{4}\xi^2|s-t| \le \frac{3}{4}|s-t|,$$

weil ξ zwischen s und t in $[0,1]$. Also $k = \frac{3}{4} < 1$

Damit ex. genau ein $\bar{x} \in I$ mit $g(\bar{x}) = \bar{x}$

Fixpunktiteration: $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 0.23125$, $x_2 = 0.203091, \dots, x_6 = 0.20206257$

Fehlerabschätzung $\quad |x_6 - \bar{x}| \le \frac{1}{1-\frac{3}{4}}|x_6 - x_5| \sim 10^{-8}$ a posteriori

Worst case Analyse $\quad |x_6 - \bar{x}| \le \frac{(\frac{3}{4})^6}{1-\frac{3}{4}}|x_1 - x_0| \sim 0.19$ a priori