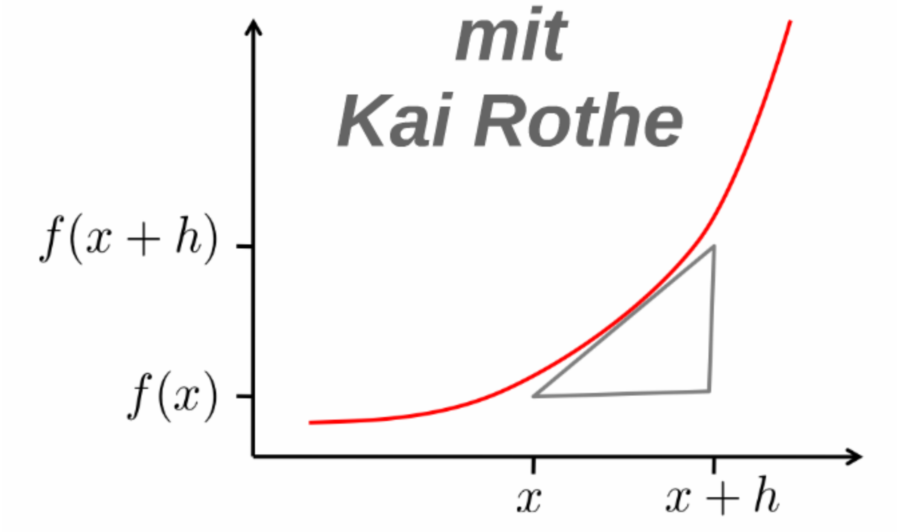
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Einführung und Grundlagen

Buch Kapitel 1

Ihr Professor

Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Do 10:30-11:15

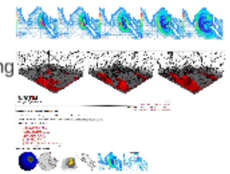
Hintergrund

Kurz-CV

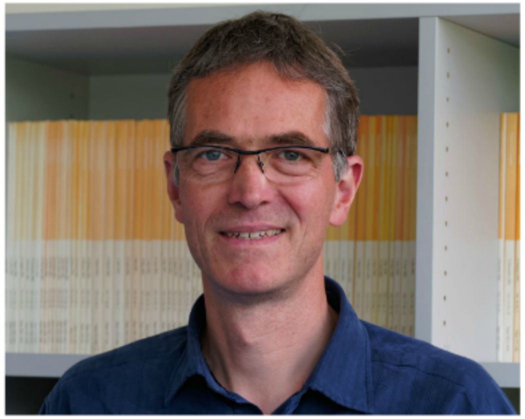
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung
Adaptive Atmosphären Modellierung
Gitter Erzeugung
Multi-Skalen Simulationen



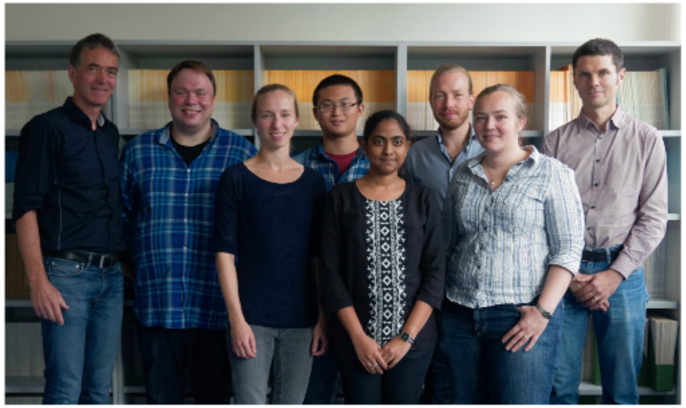
Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Do 10:30-11:15

Hintergrund

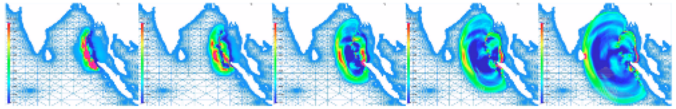


Kurz-CV

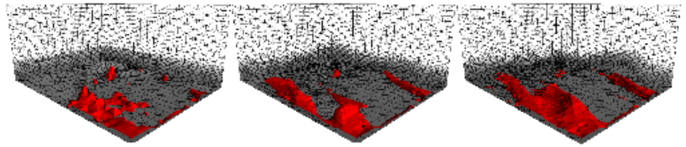
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

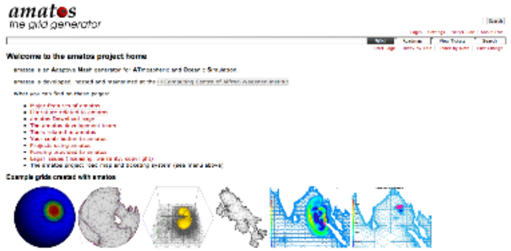
Adaptive Tsunami Modellierung



Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung



Multi-Skalen Simulationen

Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.
R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/index.html

Bitte gründlich vorbereiten!

Räume

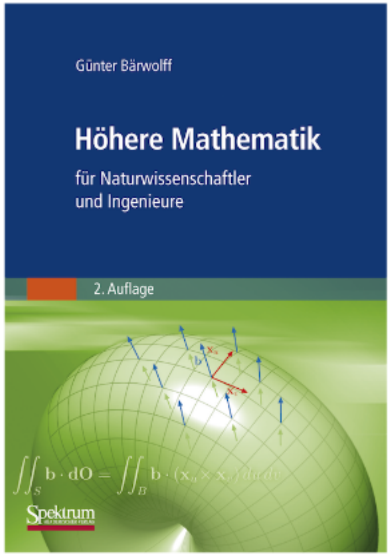
Dienstags:
Audimax I
(Video H0.16)

Donnerstags:
Audimax II

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.



R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/index.html

Bitte gründlich vorbereiten!

Räume

Dienstags:
Audimax I
(Video H0.16)

Donnerstags:
Audimax II

Kurze Wiederholung von Grundlagen

Logische Aussagen

Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert: $\omega(A) = W$
$\omega(B) = W$
$\omega(C) = F$

Aussageform:

Beispiel:
$A(x)$:= "$P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 4)$ und $P_3 = (5, x)$ liegen auf einer Geraden"

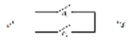
Man sieht sofort:
$A(10)$ ist wahr $\Rightarrow \omega(A(10)) = W$.

Logische Operationen

Negation:
$\bar{A}$ oder $\neg A$ definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion: $A \wedge B$
$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$

Alternative: $A \vee B$
$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$ und $\omega(B) = F$.



Implikation: $A \Rightarrow B$
$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$
$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Wahrheitswerttabellen

A	$\bar{A}$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
		F	W	F	W	W	F
		F	F	F	F	W	W

Abbildungen

Seien A und B Mengen. Dann verstehen wir unter einer Abbildung f von A nach B,

$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x),$$

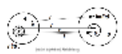
eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein $b \in B$, $b = f(x)$ zuordnet. Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, dann nennen wir

$$f(A') := \{y \in B \mid \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$$

die Bildmenge von A', und

$$f^{-1}(B') := \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

die Urbildmenge von B'.



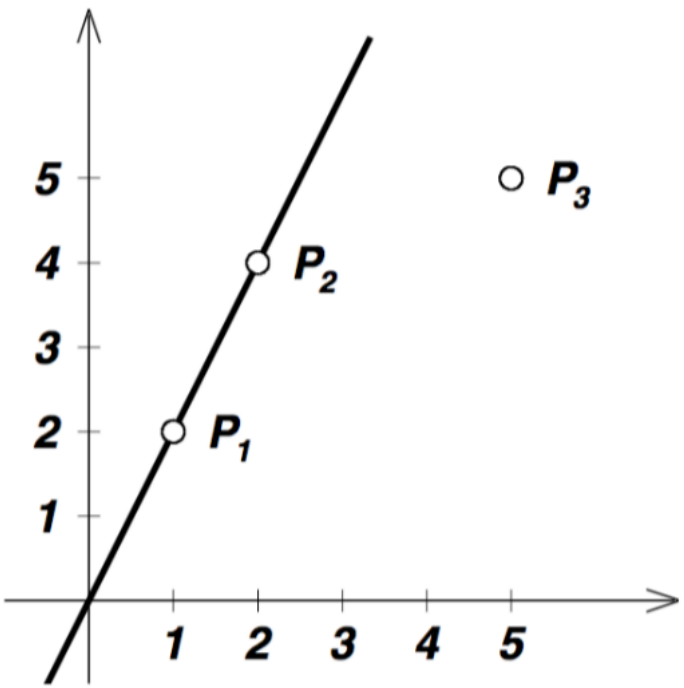
Abbildungen (Forts.)

- **Injektiv**: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt injektiv (eineindeutig), falls für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:
$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$
- **Surjektiv**: Eine Abbildung f heißt surjektiv, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass
$$f(a) = b, \quad \text{(d.h. } f(A) = B)$$
- **Bijektiv**: Eine Abbildung f heißt bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Beispiel: Logische Aussagen

A := ”625 ist durch 5, 25 und 125 teilbar”
B := ”x2 + 1 = 0 hat keine reelle Lösung” → http://pingo.upb.de/361806

C := ”Die Punkte P1 = (1,2), P2 = (2,4) und P3 = (5,5) liegen auf einer Geraden”



Logische Aussagen

Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Wahrheitswert:

$$\omega(\mathsf{A}) = \mathsf{W}$$
$$\omega(\mathsf{B}) = \mathsf{W}$$
$$\omega(\mathsf{C}) = \mathsf{F}$$

Aussageform:

Beispiel:

A(x) := "$P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,4)$ und $P_3 = (5,x)$ liegen auf einer Geraden"

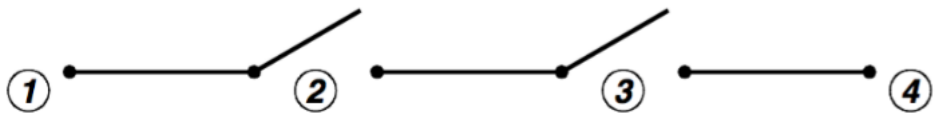
Man sieht sofort:

A(10) ist wahr $\Rightarrow \omega(\mathsf{A}(10)) = \mathsf{W}$.

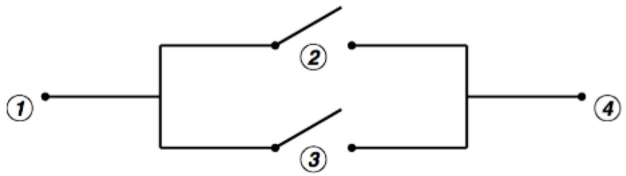
Logische Operationen

Negation:
$\bar{A}$ oder $\neg A$ definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion: $A \wedge B$
$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$.



Alternative: $A \vee B$
$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$, und $\omega(B) = F$.



Implikation: $A \Rightarrow B$
$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$
$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Wahrheitswerttabellen

A	$\overline{A}$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	F	F
		F	W	F	W	W	F
		F	F	F	F	W	W

Beispiel

Aussage:

$$C := (A \wedge (B \Longrightarrow \overline{A})) \Longrightarrow \overline{B}$$

Zugehörige Wahrheitswerttabelle:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$B \Longrightarrow \overline{A}$	$A \wedge (B \Longrightarrow \overline{A})$	C
W	W	F	F	F	F	W
W	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W

C immer wahr: **Tautologie**

Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitswerttabelle ist gültig:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \Longrightarrow B$	$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Abbildungen

Seien A und B Mengen. Dann verstehen wir unter einer **Abbildung** f von A nach B,

$$f : A \to B, \;\; a \mapsto f(a),$$

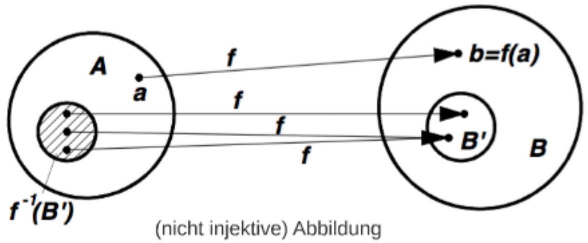
eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B, \;\; b = f(a)$ zuordnet. Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, dann nennen wir

$$f(A') := \{y \in B | \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$$

die **Bildmenge** von A', und

$$f^{-1}(B') := \{x \in A | f(x) \in B'\}$$

die **Urbildmenge** von B'.



(nicht injektive) Abbildung

Abbildungen (Forts.)

- **Injektiv**: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt injektiv (eineindeutig), falls für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:
$$a_1 \neq a_2 \;\Rightarrow\; f(a_1) \neq f(a_2).$$

- **Surjektiv**: Eine Abbildung f heißt surjektiv, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass
$$f(a) = b, \quad \text{(d.h. } f(A) = B\text{)}$$

- **Bijektiv**: Eine Abbildung f heißt bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Natürliche Zahlen und Vollständige Induktion

Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1) 1 ist eine natürliche Zahl.
2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
(i) $1 \in A$,
(ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) $A(n_0)$ ist wahr,
2) für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$: $A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

3

Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet. Danach lässt sich jede natürliche Zahl $n > 1$ auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_k^{\nu_k}$$

mit $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1) 1 ist eine natürliche Zahl.
2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) $A(n_0)$ ist wahr,

2) für alle $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 :\ \ A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet. Danach lässt sich jede natürliche Zahl $n > 1$ auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$$

mit $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P},\ \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

Ganze, rationale und reelle Zahlen

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: $\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in $\mathbb{Z}$, falls n Teiler von m!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = \tfrac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ a, b \text{ teilerfremd}\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

①

Dezimalbrüche

Beobachtung: Darstellung als Dezimalzahl. Beispiel $\frac{9}{8} = 1{,}125$ oder

$$1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Es gilt: $a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a$ darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch

$$a = \sum_{n=0}^{N} z_{N-n} 10^{N-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k},\quad z_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Kurzform: $a = z_N z_{N-1} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Q}$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

  $$1{,}41\ ;\quad 1{,}414\ ;\quad 1{,}4142\ ;\quad 1{,}41421\ \dots$$

  für $x = \sqrt{2}$
- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen

②

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ +3,\ -3,\ \ldots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: $\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in $\mathbb{Z}$, falls n Teiler von m!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ a, b \text{ teilerfremd}\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- "a, b teilerfremd" $\Rightarrow$ Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind keine eigenständigen Elemente in $\mathbb{Q}$
- Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $ggT(a, b) = 1$

Dezimalbrüche

Beobachtung: Darstellung als Dezimalzahl. Beispiel $\frac{9}{8} = 1,125$, oder

$$1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Es gilt: $a \in \mathbb{Q} \to a$ darstellbar als *unendlicher periodischer Dezimalbruch*:

$$a = \sum_{n=0}^{m} z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k} \ , z_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Kurzform: $a = z_m z_{m-1} \ldots z_0, z_{-1} z_{-2} \ldots$

Beispiel: $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots$

oder:

$$\frac{1}{7} = 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + ...$$

Periode: 142857

$\frac{90}{8} = 11,25000\ldots$

oder:

$$1 \cdot 10^{1} + 1 \cdot 10^{0} + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

Periode: 0.

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Q}$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

$$1,41\,; \quad 1,414\,; \quad 1,4142\,; \quad 1,41421\,\ldots$$

für $x = \sqrt{2}$

- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen

Analysis I

Einführung und Grundlagen

Infos zum Kurs

Literatur

Übungsleitung und Übungen

Räume

Kurze Wiederholung von Grundlagen

Logische Aussagen

Logische Operationen

Abbildungen

Ihr Professor

Koordinaten:

Hintergrund

Forschungsinteressen

Natürliche Zahlen und Vollständige Induktion

Peano Axiome

Prinzip vollständige Induktion

Fundamentalsatz der Arithmetik

Ganze, rationale und reelle Zahlen

Ganze Zahlen

Rationale Zahlen

Reelle Zahlen

Dezimalbrüche