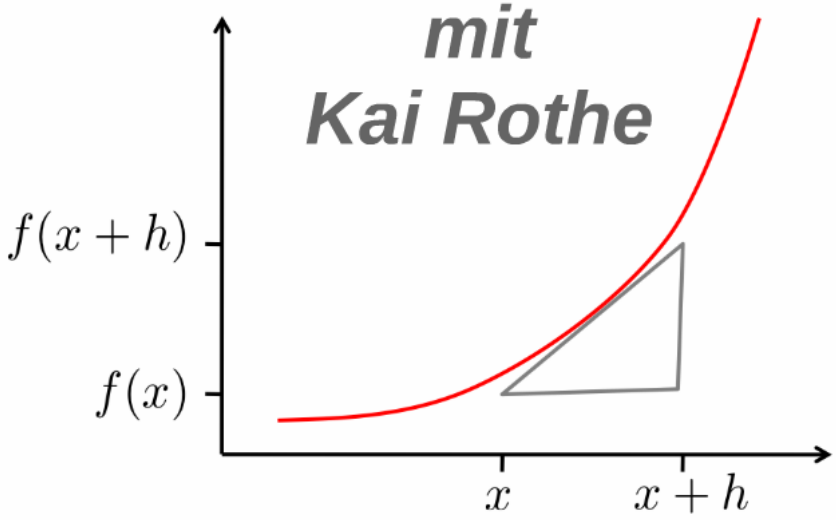
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

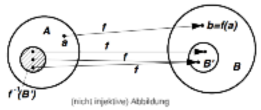


Ungleichungen und Komplexe Zahlen

Buch Kapitel 1

Was bisher geschah

Abbildungen



Logische Aussagen

Beispiel: Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitswertetabelle ist gültig:

Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

- Peano Axiome
- Induktionsprinzip
- Fundamentalsatz der Arithmetik

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Q}$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, -3, -3, \ldots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in $\mathbb{Z}$, falls n Teiler von m!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \{q : q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a, b \text{ teilerfremd}\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

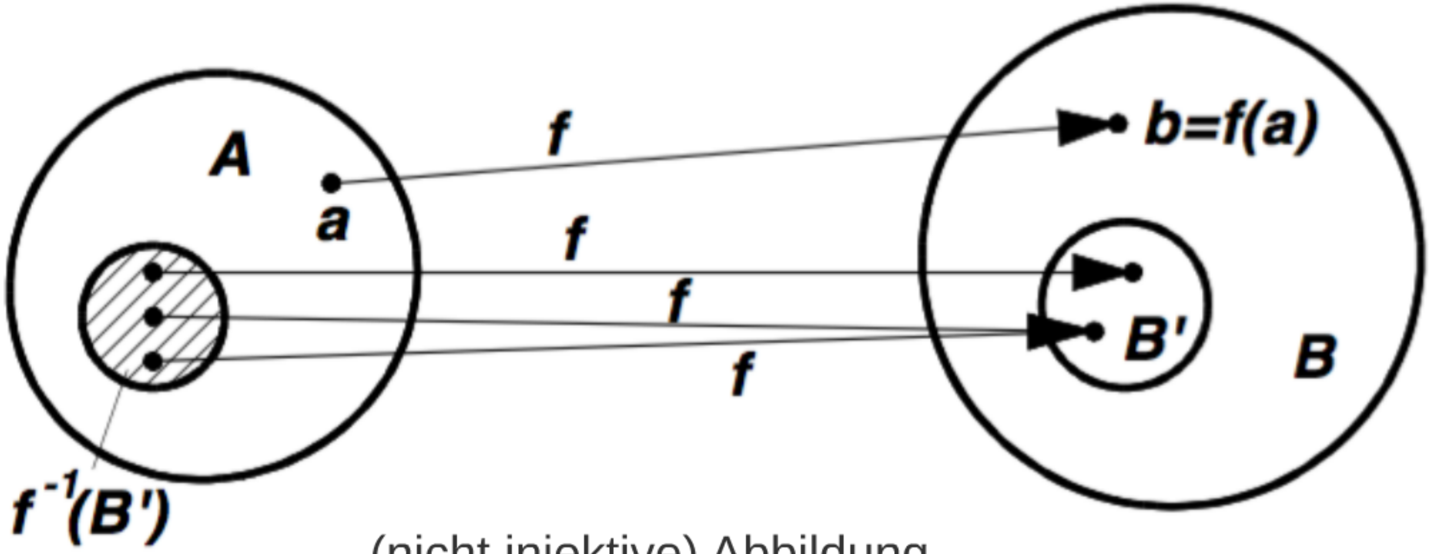
Logische Aussagen

Beispiel: Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitswerttabelle ist gültig:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \Longrightarrow B$	$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Abbildungen



(nicht injektive) Abbildung

Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

- Peano Axiome
- Induktionsprinzip
- Fundamentalsatz der Arithmetik

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ +3,\ -3,\ \dots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in $\mathbb{Z}$, falls n Teiler von m!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ a, b \ \text{teilerfremd}\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- "a, b teilerfremd" $\Rightarrow$ Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind keine eigenständigen Elemente in $\mathbb{Q}$
- Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $ggT(a, b) = 1$

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Q}$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

  $$1,41\ ; \quad 1,414\ ; \quad 1,4142\ ; \quad 1,41421\ \ldots$$

  für $x = \sqrt{2}$

- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen

Ungleichungen und Beträge

Grundlage: Axiome

Axiom 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelte genau eine der Beziehungen:

$$x < y \quad x = y \quad x > y.$$

Axiom 2: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge a \leq b \quad \Rightarrow \quad x + a < y + b.$$

Axiom 3: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge 0 < a \quad \Rightarrow \quad ax < ay.$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt:

1. $\forall c \in \mathbb{R}: \quad a + c > b + c$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ c > 0: \quad a \cdot c > b \cdot c$
3. $\forall c \in \mathbb{R},\ c < 0: \quad a \cdot c < b \cdot c$
4. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$
5. $a > b \wedge c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d$
6. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > b^n$
7. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Rechenregeln für Beträge

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

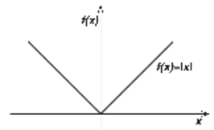
1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$
3. $|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
5. $|a + b| \geq ||a| - |b||$

4

Definition des Betrages

Betrag: $x \in \mathbb{R}$, dann ist $|x|$ definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x > 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0, \\ -x & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$



Grundlage: Axiome

Axiom 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelte genau eine der Beziehungen:

$$x < y \quad x = y \quad x > y.$$

Axiom 2: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge a \leq b \quad \Rightarrow \quad x + a < y + b.$$

Axiom 3: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge 0 < a \quad \Rightarrow \quad ax < ay.$$

Rechenregeln für Ungleichungen

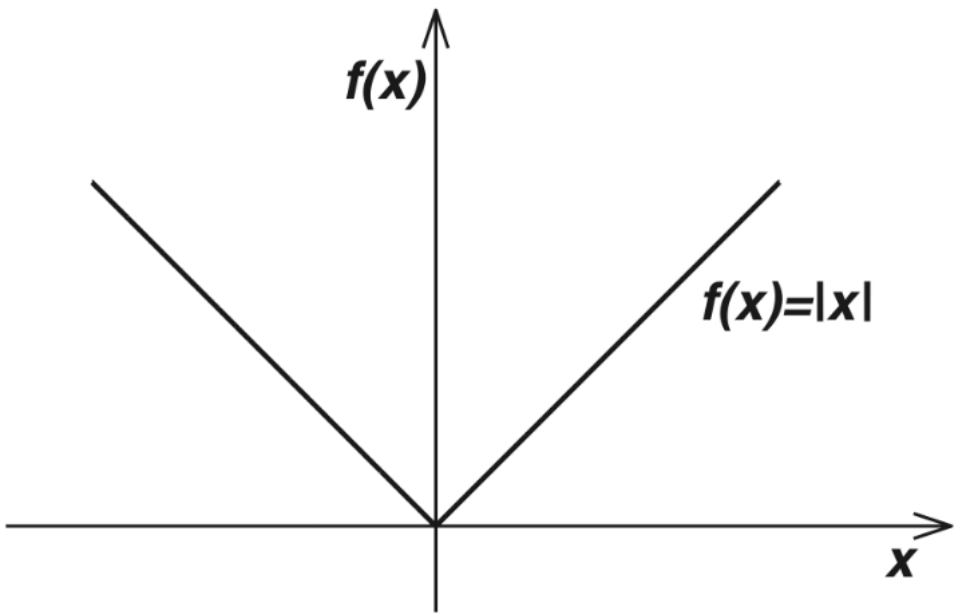
Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt:

1. $\forall c \in \mathbb{R}: \quad a + c > b + c$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ c > 0: \quad a \cdot c > b \cdot c$
3. $\forall c \in \mathbb{R},\ c < 0: \quad a \cdot c < b \cdot c$
4. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$
5. $a > b \wedge c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d$
6. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > b^n$
7. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Definition des Betrages

Betrag: $x \in \mathbb{R}$, dann ist $|x|$ definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x > 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0, \\ -x & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$



Rechenregeln für Beträge

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$
3. $|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
5. $|a + b| \geq ||a| - |b||$

Komplexe Zahlen

Motivation

Erinnerung:

- $\mathbb{Z}$: Die Gleichung $n + x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$: Die Gleichung $n \cdot x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$: Die Gleichung $x \cdot x = q$ lösbar für alle $q \in \mathbb{R}$

Problem: $x^2 + px + q = 0$ ist nicht lösbar für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$!

Denn: Verwende *pq*-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Formel ist nicht lösbar für $\frac{p^2}{4} - q < 0$!

Definition

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
   a heißt *Realteil* von z: $a =: Re\, z$.
   b heißt *Imaginärteil* von z: $b =: Im\, z$.
2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ gelte:
   $$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$
   Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.
3. Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.
4. Betrag $|z|$ zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : Im\, z = 0\}$

Rechenregeln

Addition/Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

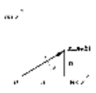
Division: (sei $z_2 = (a_2 + b_2 i) \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 - b_2^2} i = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Polarkoordinaten

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Punkt in Zahlenebene ... durch (r, ϕ)
2. r: ... Betrag von z (Abstand vom Ursprung)
3. ϕ: Argument von z (Winkel zur x-Achse)



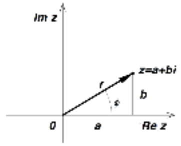
Bemerkungen:

- ϕ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Betrachte $\phi \in [-\pi, \pi]$
- Es gilt: $a = r \cos\phi$ und $b = r \sin\phi$
- Umgekehrt gilt: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ und $\tan\phi = \frac{b}{a}$, $(a \neq 0)$
- Falls $a = 0$:
  $$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$
- Falls $z = 0$, so ist $r = 0$ und ϕ unbestimmt.

Gaußsche Zahlenebene

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Führe in Ebene kartesisches Koordinatensystem (x, y) ein.
2. Trage $a = Re\, z$ auf der x-Achse auf.
3. Trage $b = Im\, z$ auf der y-Achse auf.



Motivation

Erinnerung:

- $\mathbb{Z}$: Die Gleichung $n + x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$: Die Gleichung $n \cdot x = m$ lösbar für alle $n, m \in \mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$: Die Gleichung $x \cdot x = q$ lösbar für alle $q \in \mathbb{R}$

Problem: $x^2 + px + q = 0$ ist nicht lösbar für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$!

Denn: Verwende pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

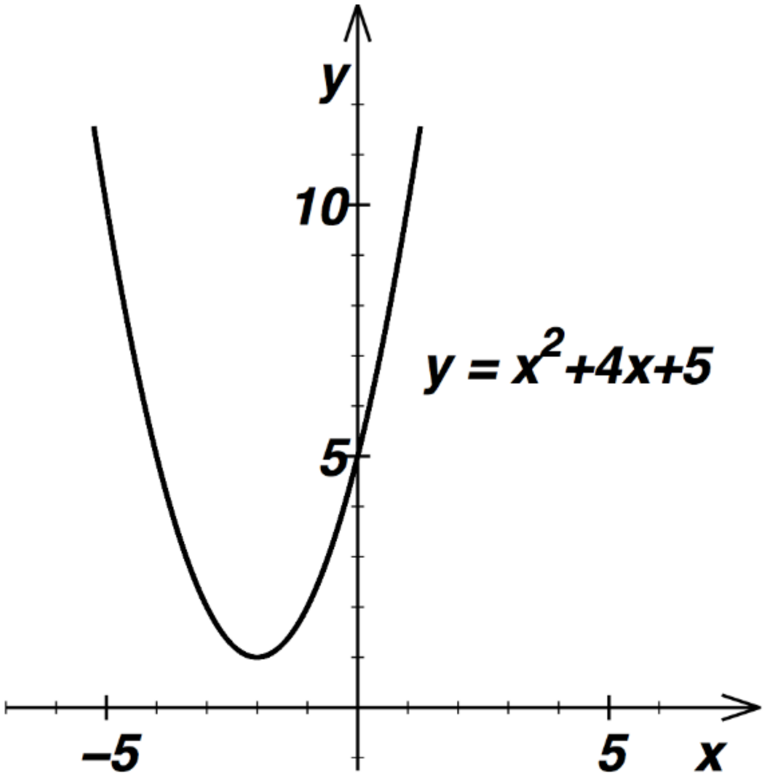
Formel ist nicht lösbar für $\frac{p^2}{4} - q < 0$!

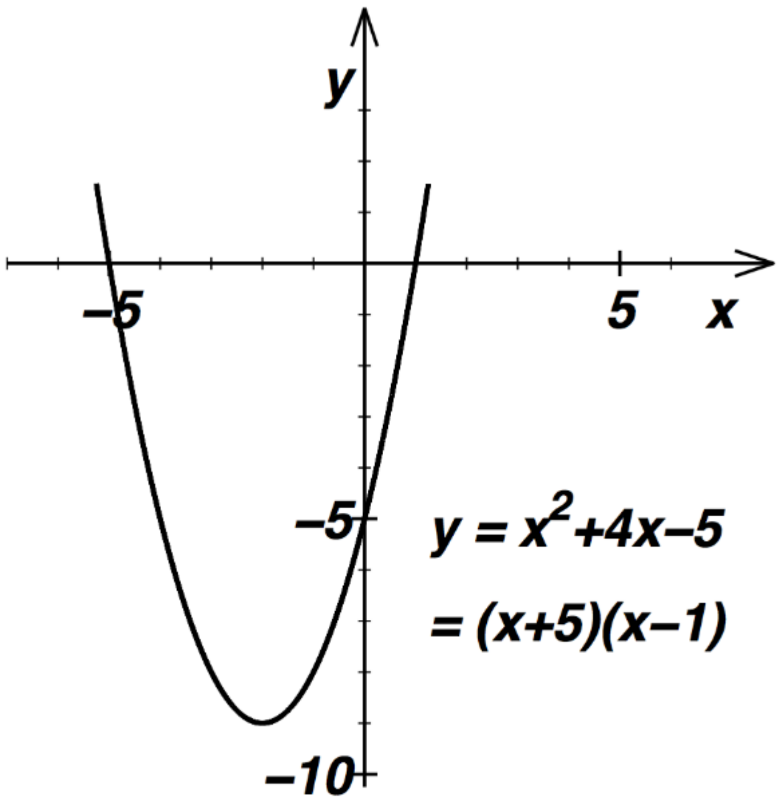
Beispiel:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1}$$

Graphische Veranschaulichung:





Definition

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition:

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
   a heißt *Realteil* von z: $a =: Re z$,
   b heißt *Imaginärteil* von z: $b =: Im z$

2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ gelte:

   $$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

   Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.

3. Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$: zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.

4. Betrag $|z|$: zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \; Im z = 0\}$

Rechenregeln

Addition/Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Division: (sei $z_2 = (a_2 + b_2 i) \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \frac{z_1 \bar{z_2}}{|z_2|^2} \end{aligned}$$

Rechenregeln für komplex Konjugierte

Seien $z = a + bi$ und $\bar{z} = a - bi$. Dann gilt:

1. $z + \bar{z} = 2a$
2. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

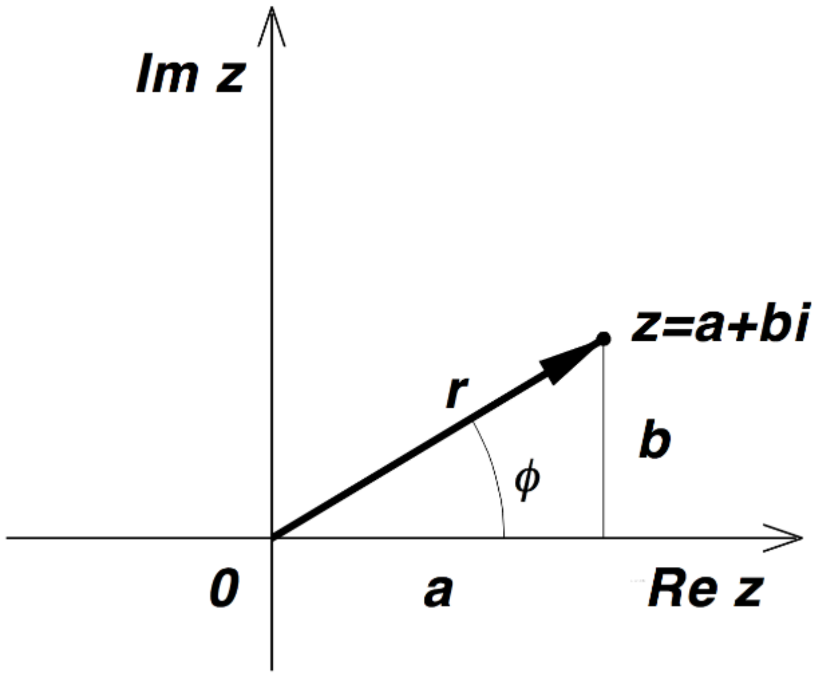
Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

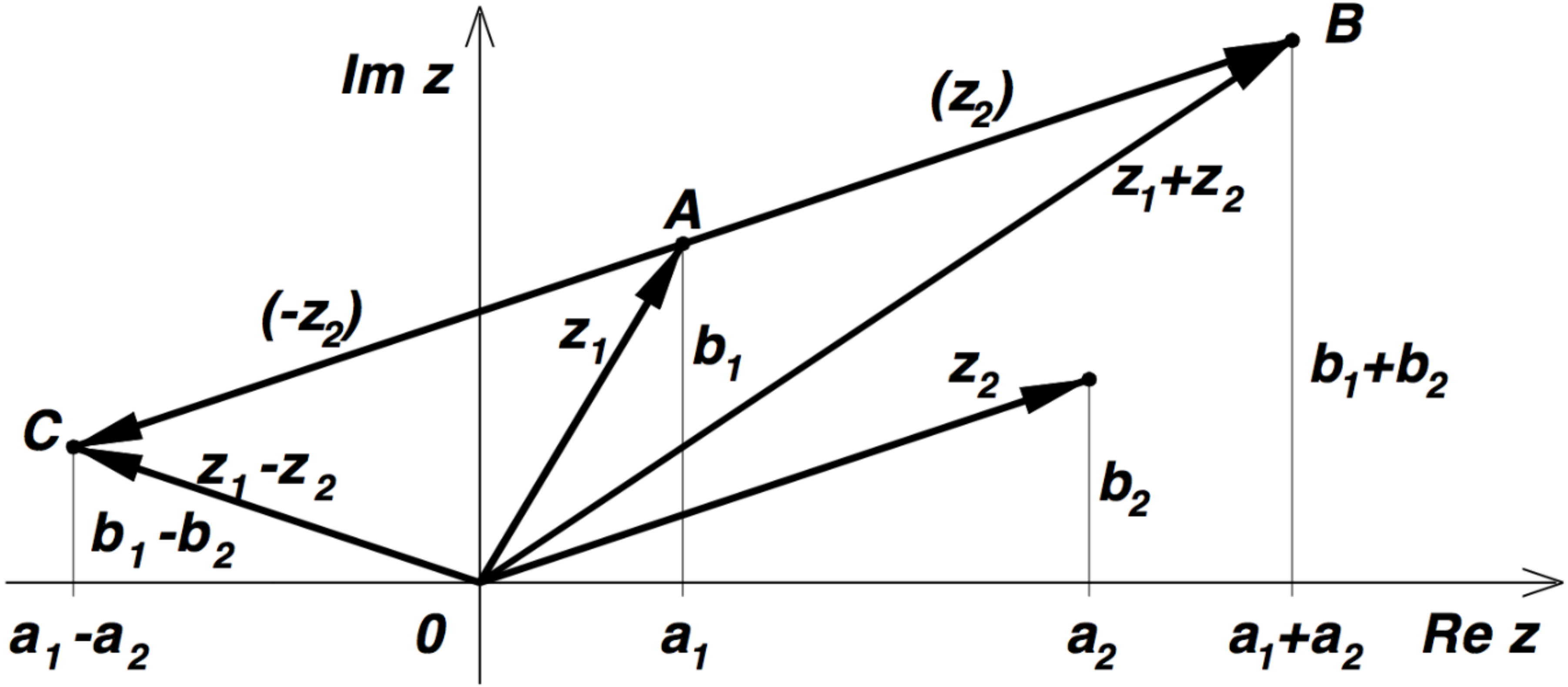
Gaußsche Zahlenebene

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Führe in Ebene kartesisches Koordinatensystem (x, y) ein.
2. Trage $a = Re\ z$ auf der x-Achse auf.
3. Trage $b = Im\ z$ auf der y-Achse auf



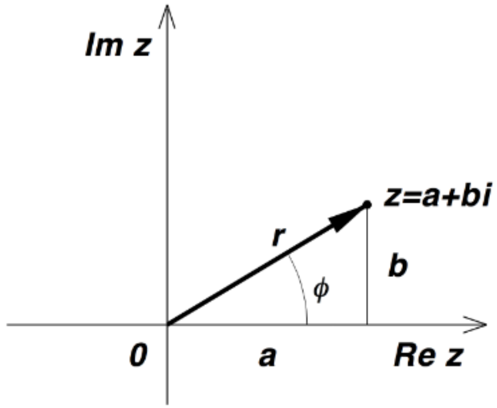
Addition/Subtraktion



Polarkoordinaten

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. Punkt in Zahlenebene charakterisiert durch (r, ϕ)
2. r absoluter Betrag von z (Abstand vom Ursprung/Länge)
3. ϕ Argument von z (Winkel zur x-Achse)



Bemerkungen:.

- ϕ nur bis auf Vielfache von π bestimmt: Betrachte $\phi \in]-\pi, \pi]$
- Es gilt: $a = r\cos\phi$ und $b = r\sin\phi$
- Umgekehrt gilt: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ und $\tan\phi = \frac{b}{a}$, $(a \neq 0)$
- Falls $a = 0$:
$$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$
- Falls $z = 0$, so ist $r = 0$ und ϕ unbestimmt

Rechenregeln in Polarkoordinaten

Allgemeine Darstellung in Polarkoordinaten:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Seien $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Dann gilt:

- $z \cdot w = |z||w|(\cos(\phi + \psi) + i\sin(\phi + \psi))$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \psi) + i\sin(\phi - \psi))$

(Addition: Übung)

Eulersche Formel

Sei $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$. Dann gilt:

$$z = |z|e^{i\phi}$$

mit der Eulerschen Formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.