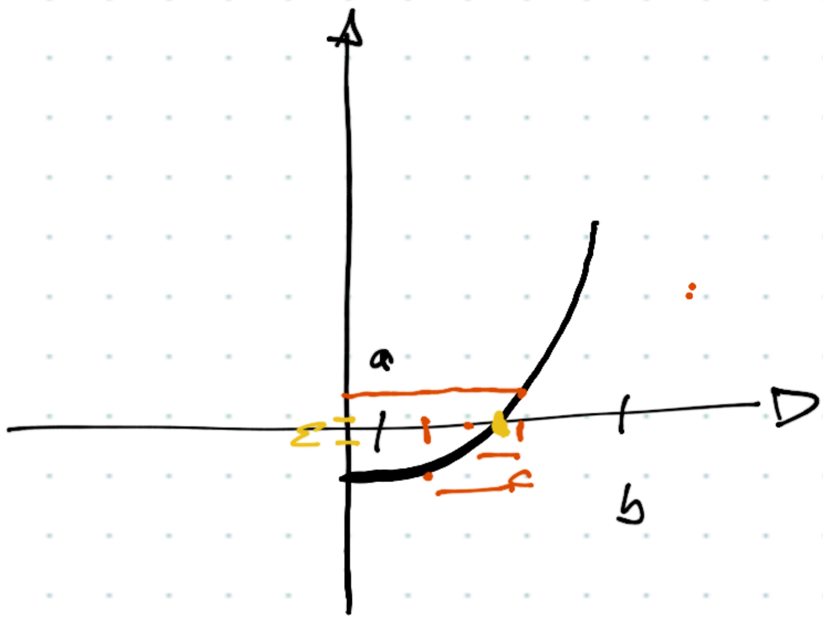
Analysis I

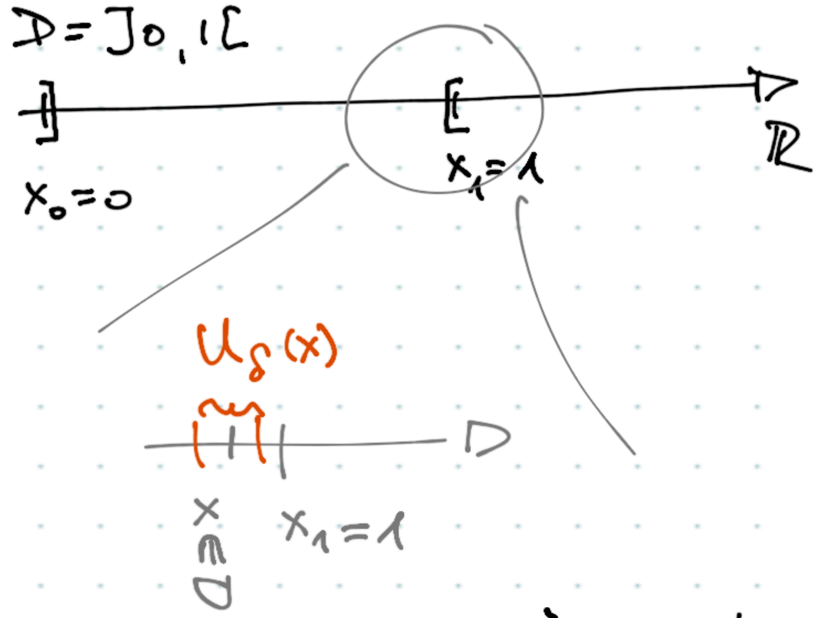
J. Behrens

22. 11. 2016



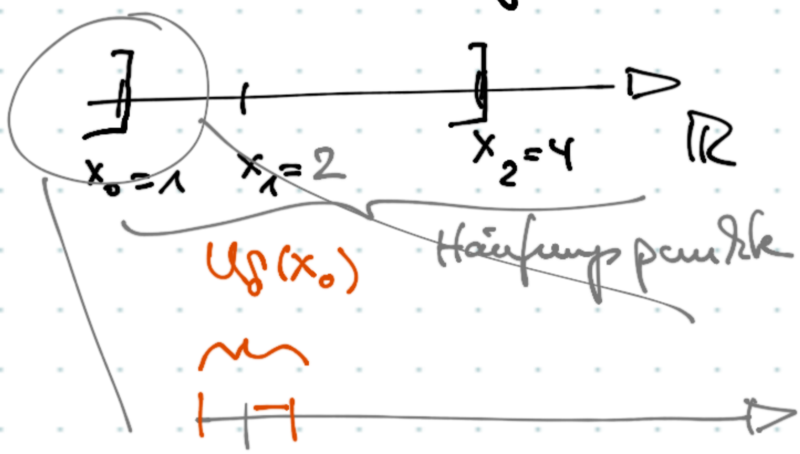
Algorithmus:

① Offene Menge:



a) Bemerkung: Vereinigung von offenen Mengen ist wieder eine offene Menge

Häufungspunkte:



a) $D = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ hat einen Häufungspunkt $(a=0)$

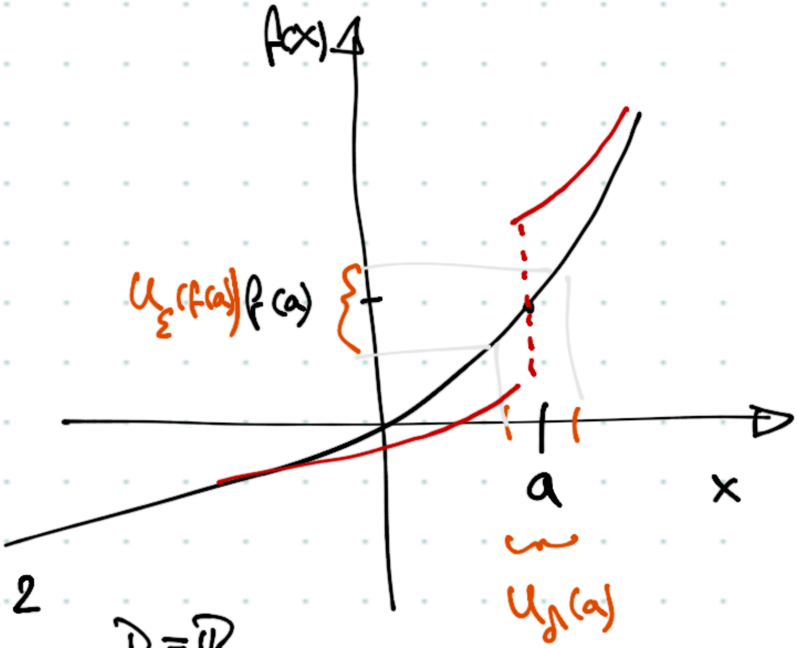
b) $D = [0,3]$, jedes Element in D ist Häufungspkt.

c) $D =]0,1]$: jedes Element $a \in [0,1]$ ist Häufungspunkt.

Innere Punkte:

a) $D =]0,2[$ offene Menge in $\mathbb{R}$, dann ist jeder $x \in]0,2[$ innerer Punkt.

② Grenzwerte:



a) Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 2 \\ 0 & \text{für } x = 2 \end{cases}, \quad D = \mathbb{R}$$

Der Grenzwert an der Stelle $a = 2$ ist 1.

b) Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$

Der Grenzwert an der Stelle $a = 0$ existiert und es gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Denn: für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = |x| \, \underbrace{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}_{\in [0,1]} \le |x|$$

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ (z.B. $\delta = \varepsilon$) : $|x| < \delta$, $x \neq 0$

$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ $\boxtimes$

③ einseitige Grenzwerte:

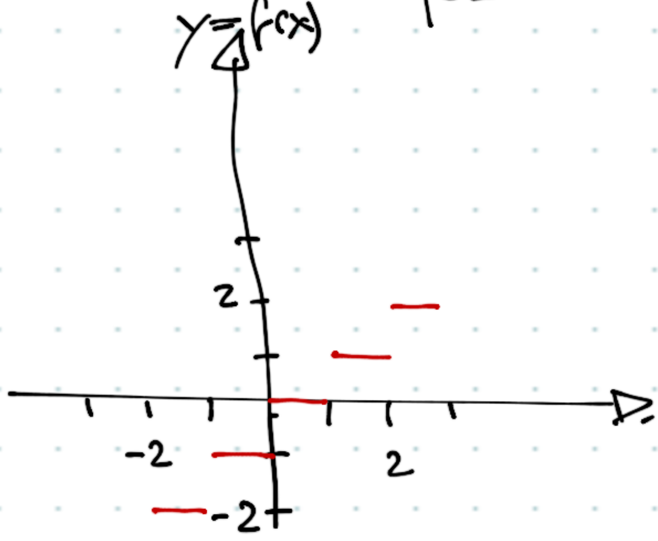
Betrachte $f(x) = \lceil x \rceil$ "entier"-Funktion

"roof"-Funktion

$\lceil x \rceil = p$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $p = \max\limits_{q \in \mathbb{Z}} \{q \le x\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \nearrow 1} \lceil x \rceil = 0$

$\lim\limits_{x \searrow 1} \lceil x \rceil = 1$



④ Uneigentlicher Grenzwert:

a) Betrachte $f(x) = \frac{1}{x^2}$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, da

zu jedem ψ ein $\delta = \frac{1}{\psi}$ existiert, so dass gilt

$|x| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\delta^2} = \psi^2 > \psi$

⑤ Konvergenzordnung

Betrachte $f(x) = \tan x$.

Für $x \to 0$ verschwindet $\tan x$ mit Ordnung 1.

da $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

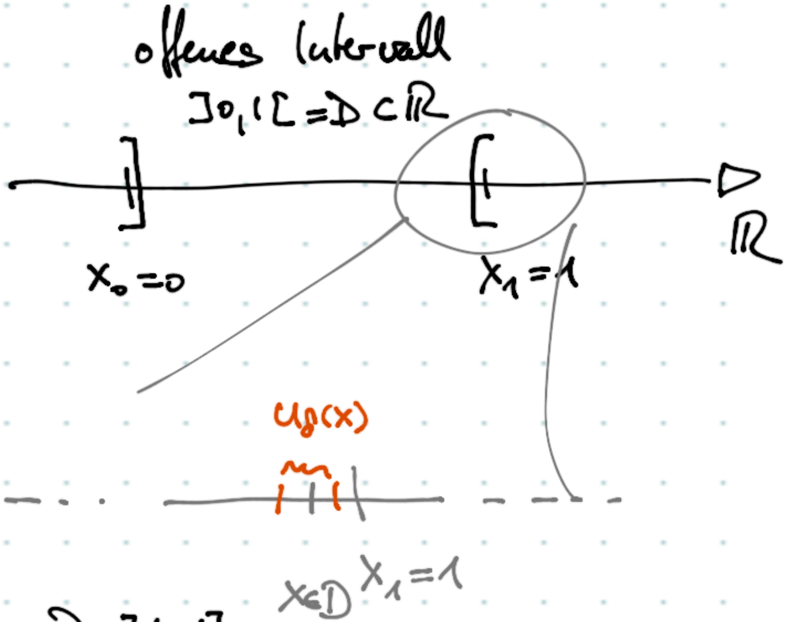
<u>Es gelten:</u> a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 \quad (p \in \mathbb{N})$

d.h. e^x strebt mit höherer Ordnung gegen ∞ als jede Potenz von x.

ANALYSIS I

24.11.2016

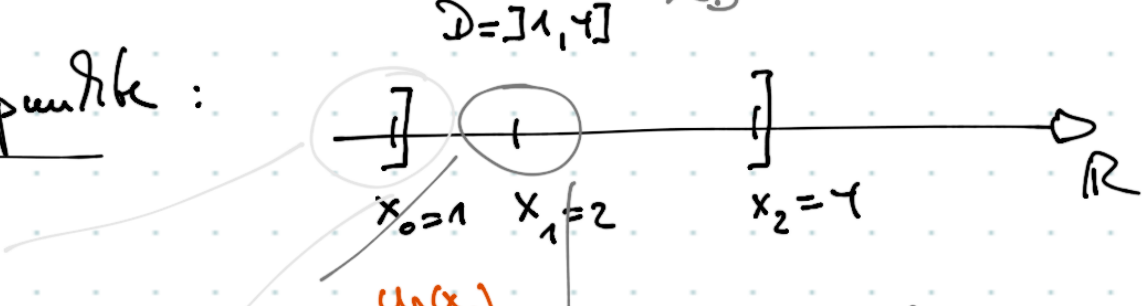
① Offene Mengen:



Eigenschaft

Die Vereinigung offener Mengen ist wieder offen.

Häufungspunkte:



Sowohl x_0 als auch x_1 und alle $x \in D$ sind Häufungspunkte von D.

a) $D = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ hat einen Häufungspunkt in $a = 0$

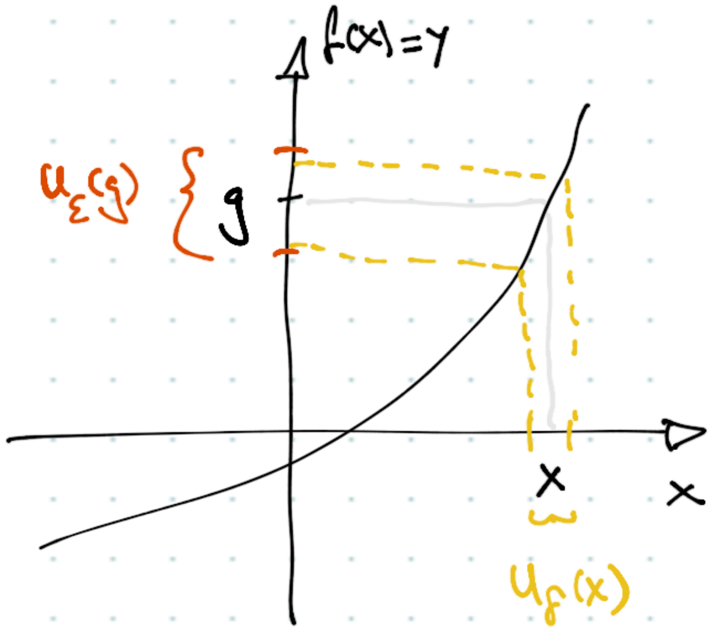
b) $D = [0, 3]$: jedes Element in D ist Häufungspunkt

c) $D =]0, 1]$: jedes Element in $[0, 1]$ ist Häufungspunkt

Innere Punkte:

$D =]0, 1[$ offene Menge in $\mathbb{R}$: jedes Element $x \in D$ ist innerer Punkt.

② Grenzwert:



a) Sei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 2 \\ 0 & \text{für } x = 2 \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$

Grenzwert an $a = 2$ ist 1

b) Sei $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$

Der Grenzwert von f an der Stelle $a=0$ existiert und es gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Denn: für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = |x| \cdot \underbrace{\left|\sin\tfrac{1}{x}\right|}_{\in [0,1]} \le |x|$$

<u>Damit</u>: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ (z.B. $\delta = \varepsilon$) :

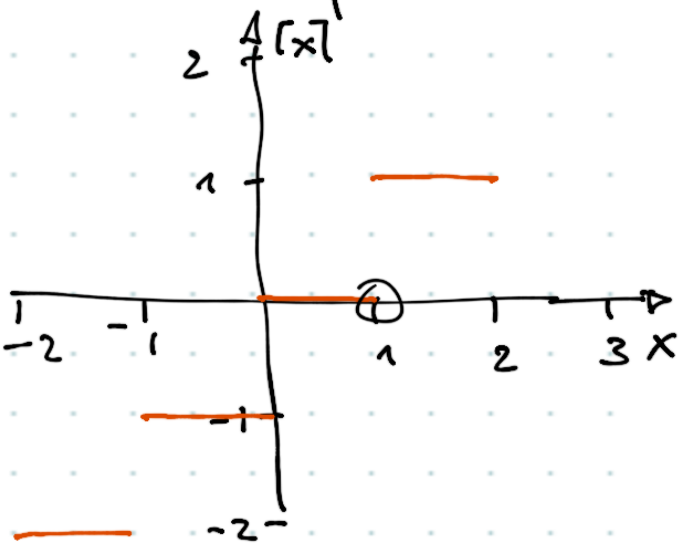
$$|x| < \delta, \ x \neq 0 \implies |f(x)| < \varepsilon \qquad \boxtimes$$

③ $f(x) = \lceil x \rceil$ "entier-Funktion"
"roof-Funktion"

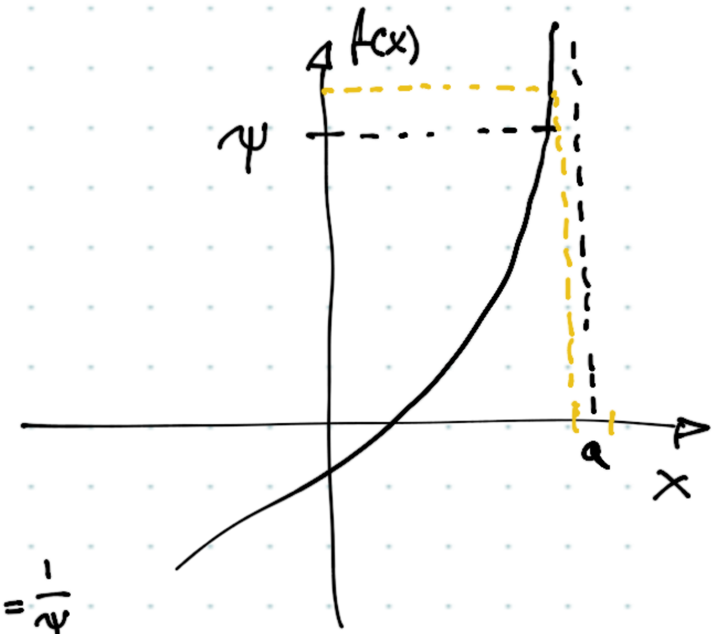
$$\lceil x \rceil = p \quad \text{mit } p \in \mathbb{Z}, \ p = \max_{q\in\mathbb{Z}} \{q \le x\}$$

$$\lim_{x \nearrow 1} \lceil x \rceil = 0$$

$$\lim_{x \searrow 1} \lceil x \rceil = 1$$



④ uneigentlicher Grenzwert:



a) Betrachte $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Denn: zu jedem ψ gibt es $\delta = \frac{1}{\psi}$

dann gilt: $|x| < \delta$: $f(x) > \frac{1}{\delta^2} = \psi^2 > \psi$

für $\psi >> 0$
insbes. > 1

⑤ Konvergenzordnung:

Betrachte $f(x) = \tan x$. Für $x \to 0$ verschwindet $\tan x$ mit der Ordnung 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 \quad (p \in \mathbb{N})$, d.h. e^x strebt mit höherer Ordnung gegen ∞ als jede Potenz von x!

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$$

wegen der Eigenschaft als Umkehrfunktion von e^x gilt für $\ln x$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N})$$