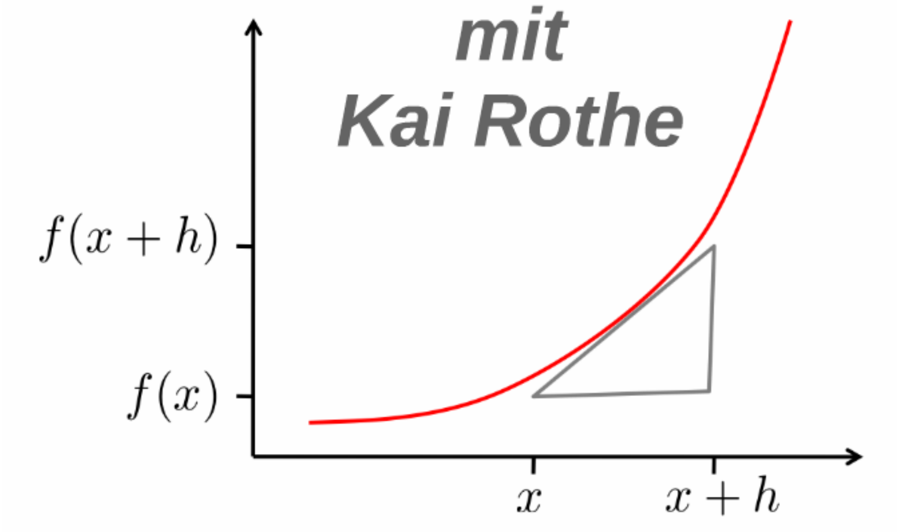
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Stetigkeit

Buch Kapitel 2.4

Erinnerung

Grenzwert

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D.
Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \to a} f(x)$ bezeichnet.

Grenzwert

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D. Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \to a} f(x)$ bezeichnet.

Folgen reeller Zahlen

Zahlenfolge

Definition:

- Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = f(n)$, die jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt unendliche Zahlenfolge.
- Bezeichnungen für unendlichen Zahlenfolgen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n).
- a_n bezeichnet das n-te Glied der Zahlenfolge.
- Eine Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, N\} \to \mathbb{R}$, die lediglich die Zahlen zwischen 1 und N in $\mathbb{R}$ abbildet, heißt endliche Zahlenfolge, oder N-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$.

Bemerkung: Da der Bildbereich einer Folge in $\mathbb{R}$ liegt, kann es Häufungspunkte geben!

Beispiel: $\{a_n\} = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ hat Häufungspunkt 1.

Nullfolge

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Schreibe: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oder $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Eigenschaften von Nullfolgen

Satz:

1. Ist (a_n) eine Nullfolge und gilt für eine Folge (b_n)
$$|b_n| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
so ist auch (b_n) eine Nullfolge.
2. Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, so sind die Folgen
$$(a_n + b_n),\ (a_n - b_n),\ (a_n \cdot b_n),\ (a_n^k),\ \text{und}\ (c a_n)$$
mit beliebigen Konstanten $k \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls Nullfolgen.

①

Zahlenfolge

Definition:

- Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ a_n = f(n)$, die jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt unendliche Zahlenfolge.
- Bezeichnungen für unendlichen Zahlenfolgen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n).
- a_n bezeichnet das n-te Glied der Zahlenfolge.
- Eine Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, N\} \to \mathbb{R}$, die lediglich die Zahlen zwischen 1 und N in $\mathbb{R}$ abbildet, heißt endliche Zahlenfolge, oder N-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$.

Bemerkung: Da der Bildbereich einer Folge in $\mathbb{R}$ liegt, kann es Häufungspunkte geben!

Beispiel: $(a_n) = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ hat Häufungspunkt 1.

Nullfolge

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Schreibe: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oder $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Eigenschaften von Nullfolgen

Satz:

1. Ist (a_n) eine Nullfolge und gilt für eine Folge (b_n)
$$|b_n| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
so ist auch (b_n) eine Nullfolge.

2. Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, so sind die Folgen
$$(a_n + b_n),\ (a_n - b_n),\ (a_n \cdot b_n),\ (a_n^k),\ \text{und } (ca_n)$$
mit beliebigen Konstanten $k \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls Nullfolgen.

①

Grenzwerte von Folgen

Definition

Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn

$$(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge ist.}$$

a heißt Grenzwert oder Limes der Folge (a_n).

Schreibe: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Cauchy-Folge

Erinnerung: Eine Folge (a_n) konvergiert also genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Eigenschaften von Folgen

Definition:

1. Wenn es für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beschränktes Intervall $[A, B] \subset \mathbb{R}$ gibt mit
   $$A \leq a_n \leq B \; \forall n \in \mathbb{N},$$
   so heißt (a_n) beschränkt.
2. A heißt untere Schranke der Folge. Das größte mögliche A heißt Infimum von (a_n) und wird mit $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ bezeichnet.
3. B heißt obere Schranke der Folge. Das kleinste mögliche B heißt Supremum von (a_n) und wird mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ bezeichnet.
4. (a_n) heißt monoton steigend, falls
   $$a_n \leq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$
5. Entsprechend heißt (a_n) monoton fallend, falls
   $$a_n \geq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$
6. Als Teilfolge von (a_n) bezeichnet man jede Folge
   $$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots \text{ kurz } (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$
   mit $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, $(n_k \in \mathbb{N})$.

Definition

Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn

$$(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge ist.}$$

a heißt Grenzwert oder Limes der Folge (a_n).

Schreibe: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

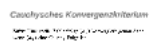
Cauchy-Folge

Erinnerung: Eine Folge (a_n) konvergiert also genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Definition: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall m, n \geq n_0.$$



Cauchysches Konvergenzkriterium

Satz: Eine reelle Zahlenfolge (a_n) konvergiert genau dann, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Eigenschaften von Folgen

Definition:

1. Wenn es für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beschränktes Intervall $[A, B] \subset \mathbb{R}$ gibt mit

   $$A \leq a_n \leq B \;\forall n \in \mathbb{N},$$

   so heißt (a_n) beschränkt.

2. A heißt untere Schranke der Folge. Das größte mögliche A heißt Infimum von (a_n) und wird mit $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ bezeichnet.

3. B heißt obere Schranke der Folge. Das kleinste mögliche B heißt Supremum von (a_n) und wird mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ bezeichnet.

4. (a_n) heißt monoton steigend, falls

   $$a_n \leq a_{n+1} \;\forall\; n \in \mathbb{N}.$$

5. Entsprechend heißt (a_n) monoton fallend, falls

   $$a_n \geq a_{n+1} \;\forall\; n \in \mathbb{N}$$

6. Als Teilfolge von (a_n) bezeichnet man jede Folge

   $$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots \;\text{kurz}\; (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

   mit $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, $(n_k \in \mathbb{N})$.

Satz (Bolzano-Weierstrass):

1. Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2. Jede beschränkte monotone Zahlenfolge konvergiert.

Stetigkeit

Definition

Definition:

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist linksseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0).$$
2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist rechtsseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0).$$
3. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ offene Teilmenge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D stetig, wenn für alle $x_0 \in D$ gilt
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Satz

Satz: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:
$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

②

Gleichmäßig Stetig

Erinnerung: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:
$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Bemerkung: δ ist im Allgemeinen von ϵ und dem jeweiligen x_0 abhängig!

Definition: Falls es für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass
$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta,$$
so heißt f gleichmäßig stetig.

Bemerkung: Ist f auf einem *abgeschlossenen Intervall* stetig, dann ist f dort auch gleichmäßig stetig.

Definition

Definition:

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist linksseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist rechtsseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

3. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ offene Teilmenge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D stetig, wenn für alle $x_0 \in D$ gilt
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Satz

Satz: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

②

Gleichmäßig Stetig

Erinnerung: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Bemerkung: δ ist im Allgemeinen von ϵ und dem jeweiligen x_0 abhängig!

Definition: Falls es für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta,$$

so heißt f gleichmäßig stetig.

Bemerkung: Ist f auf einem *abgeschlossenen Intervall* stetig, dann ist f dort auch gleichmäßig stetig.

Unstetigkeiten

Unstetig

Beobachtung: Gilt an $x_0 \in D$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

so ist x_0 Unstetigkeitsstelle von f.

Hebbare Unstetigkeit

Bemerkung: Gilt an $x_0 \subset D$

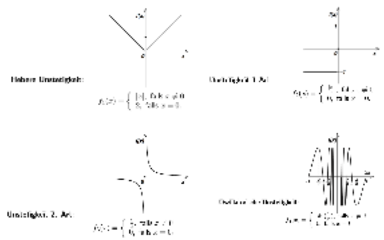
$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = g = \lim_{x \searrow x_0} f(x), \text{ aber } f(x_0) \neq g$$

so ist f in x_0 unstetig. Aber die Funktion

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x), \text{ falls } x \neq x_0 \\ g, \text{ falls } x = x_0, \end{cases}$$

ist stetig. x_0 heißt hebbare Unstetigkeitsstelle.

Beispiele



Klassifizierung der Unstetigkeit

Bemerkung:

- Falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ beide existieren, aber verschieden sind (Sprungstelle), so ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle erster Art.
- Falls mindestens einer der beiden einseitigen Limite $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ nicht existiert oder uneigentlich ist, so ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art.
- Von einer oszillatorischen Unstetigkeit in $x_0 = 0$ spricht man beispielsweise bei der Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Unstetig

Beobachtung: Gilt an $x_0 \in D$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

so ist x_0 Unstetigkeitsstelle von f.

Hebbare Unstetigkeit

Bemerkung: Gilt an $x_0 \in D$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = g = \lim_{x \searrow x_0} f(x), \text{ aber } f(x_0) \neq g$$

so ist f in x_0 unstetig. Aber die Funktion

$$f^\star(x) := \begin{cases} f(x), \text{ falls } x \neq x_0 \\ g, \text{ falls } x = x_0, \end{cases}$$

ist stetig. x_0 heißt hebbare Unstetigkeitsstelle.

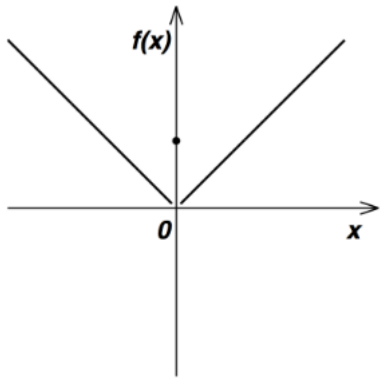
Klassifizierung der Unstetigkeit

Bemerkung:

- Falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ beide existieren, aber verschieden sind (Sprungstelle), so ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle erster Art.
- Falls mindestens einer der beiden einseitigen Limite $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ nicht existiert oder umeigentlich ist, so ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art.
- Von einer oszillatorischen Unstetigkeit in $x_0 = 0$ spricht man beispielsweise bei der Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

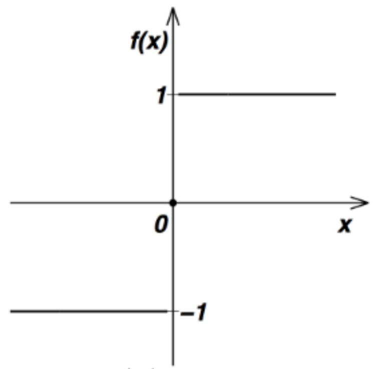
Beispiele

Hebere Unstetigkeit:



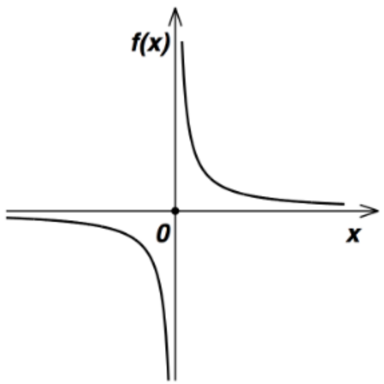
$$f_1(x) = \begin{cases} |x|, \text{ falls } x \neq 0 \\ 2, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Unstetigkeit 1 Art:



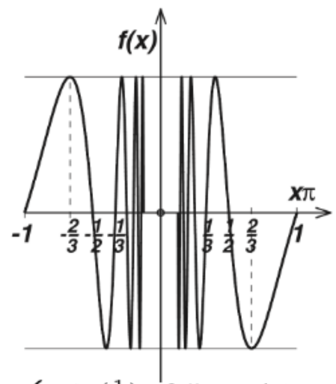
$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Unstetigkeit 2. Art:



$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Oszillatorische Unstetigkeit:



$$f_4(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Nullstellensatz

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben
$f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen (d.h. $f(a) \cdot f(b) < 0$).
Dann besitzt f in $[a,b]$ mindestens eine Nullstelle.

Bemerkung: Benutzt beim Intervallhalbierungsverfahren.

Beweisidee: Verwende Intervallhalbierungsverfahren und konstruiere Folge, die aufgrund der Stetigkeit gegen eine Nullstelle konvergiert.

Zwischenwertsatz

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq \bar{y} \leq f(b)$.
Dann existiert mindestens ein $\bar{x}$, $a \leq \bar{x} \leq b$ mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Also, nimmt eine stetige Funktion f jeden Wert $\bar{y}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweisidee: Wende den Nullstellensatz auf $g(x) := f(x) - \bar{y}$ an.

Weitere Eigenschaften

Verkettete Funktionen: Sei $f : A \to B$ in x_0 stetig
und $g : B \to C$ in $f(x_0)$ stetig.

Dann ist $g \circ f(x) : A \to C$ stetig in x_0.

Elementare Funktionen: Sei $f : A \to B$ elementar.
Dann ist f auf jedem Intervall $I \subseteq D$ stetig,
wobei D den jeweiligen Definitionsbereich beschreibt (Vorlesung vom 15./17.11.16).

Umkehrfunktion: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton
und stetig auf dem Intervall I.

Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig $D = f(I)$.

Rechenregeln für stetige Funktionen

Sind f und g stetig im Punkt x_0, so sind auch

$$f + g,\; f - g,\; f \cdot g, \text{ und } \frac{f}{g}\; (g(x_0) \neq 0)$$

stetig in x_0.

Nullstellensatz

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben
$f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen (d.h. $f(a) \cdot f(b) < 0$).
Dann besitzt f in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle.

Bemerkung: Benutzt beim Intervallhalbierungsverfahren.

Beweisidee: Verwende Intervallhalbierungsverfahren und konstruiere Folge, die aufgrund der Stetigkeit gegen eine Nullstelle konvergiert.

Zwischenwertsatz

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq \bar{y} \leq f(b)$. Dann existiert mindestens ein $\bar{x}$, $a \leq \bar{x} \leq b$ mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Also, nimmt eine stetige Funktion f jeden Wert $\bar{y}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweisidee: Wende den Nullstellensatz auf $g(x) := f(x) - \bar{y}$ an.

Rechenregeln für stetige Funktionen

Sind f und g stetig im Punkt x_0, so sind auch

$$f + g,\ f - g,\ f \cdot g,\ \text{und}\ \frac{f}{g}\ (g(x_0) \neq 0)$$

stetig in x_0.

Weitere Eigenschaften

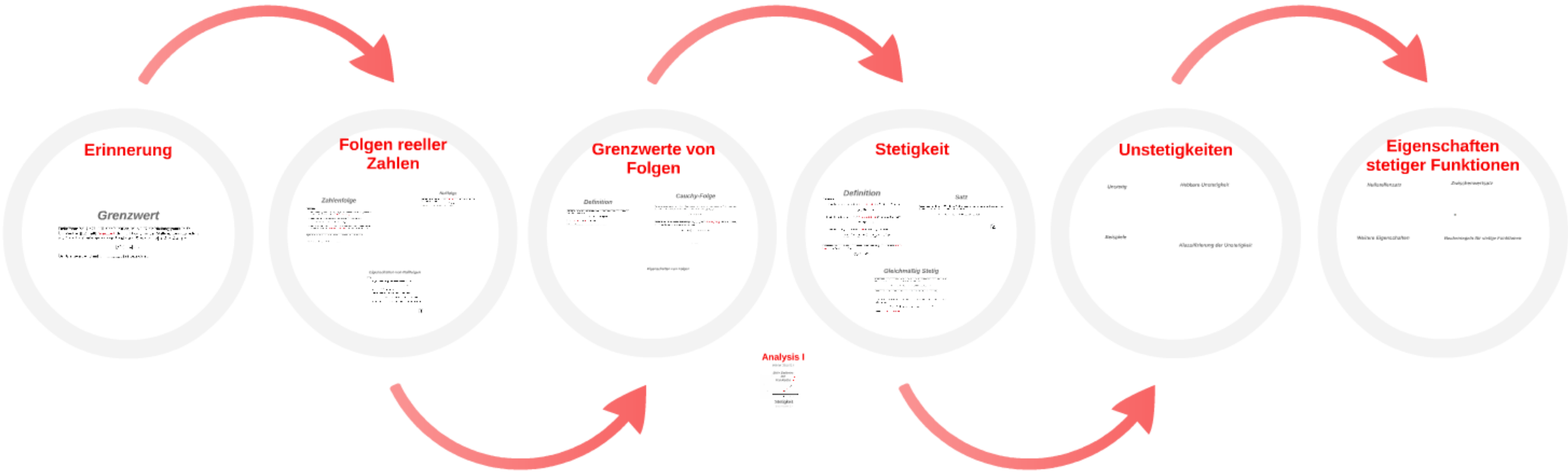
Verkettete Funktionen: Sei $f : A \to B$ in x_0 stetig
und $g : B \to C$ in $f(x_0)$ stetig.

Dann ist $g \circ f(x) : A \to C$ stetig in x_0.

Elementare Funktionen: Sei $f : A \to B$ elementar.
Dann ist f auf jedem Intervall $I \subset D$ stetig,
wobei D den jeweiligen Definitionsbereich beschreibt (Vorlesung vom 15./17.11.16).

Umkehrfunktion: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton
und stetig auf dem Intervall I.

Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig $D = f(I)$.



Erinnerung
Grenzwert
Folgen reeller Zahlen
Zahlenfolge
Grenzwerte von Folgen
Definition
Cauchy-Folge
Stetigkeit
Definition
Satz
Gleichmäßig Stetig
Unstetigkeiten
Eigenschaften stetiger Funktionen
Analysis I