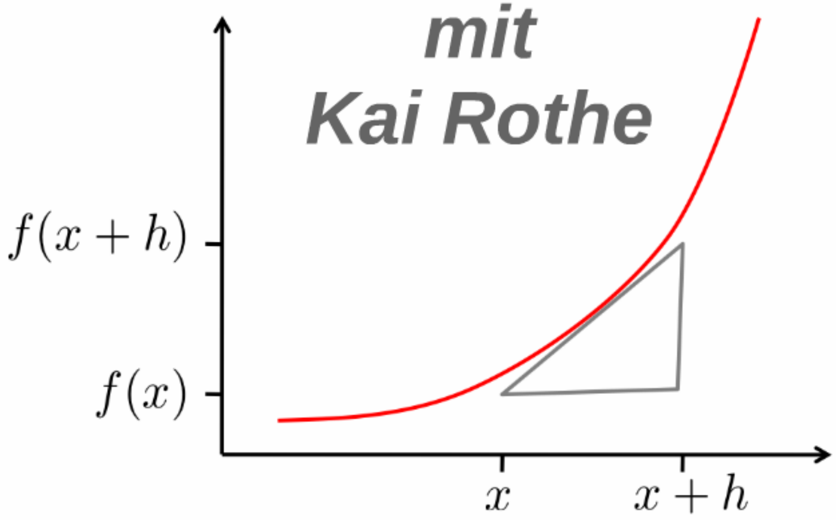
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Eigenschaften Stetiger Funktionen und Differenzierbarkeit

Buch Kapitel 2.5-2.6

Maximum/Minimum stetiger Funktionen

Erinnerung

Bemerkung: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt.

- Falls f nach oben beschränkt, dann gilt: $f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x)$.
- Falls f nach unten beschränkt, dann gilt: $f(x) \geq \inf_{x \in A} f(x)$.

Aber: Infimum bzw. Supremum müssen nicht angenommen werden!
(Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D =]0, \infty[$.)

Definition

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

- Falls x_0 existiert, so dass $f(x_0)$ gleich dem Supremum, d.h.

$$f(x) \leq f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x), \quad \forall x \in D,$$

  so heißt $f(x_0)$ das Maximum von f (schreibe $\max_{x \in D} f(x) = f(x_0)$).
- x_0 heißt dann Maximalstelle von f.
- Falls x_0 existiert, so dass $f(x_0)$ gleich dem Infimum, d.h.

$$f(x) \geq f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x), \quad \forall x \in D,$$

  so heißt $f(x_0)$ das Minimum von f (schreibe $\min_{x \in D} f(x) = f(x_0)$).
- x_0 heißt dann Minimalstelle von f.

Mengeneigenschaften

Definition: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

- A heißt abgeschlossen, wenn alle Häufungspunkte a der Menge A auch Elemente der Menge sind, d.h. $a \in A$.
- A heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Bemerkung: Abgeschlossene Intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle sind kompakte Mengen in $\mathbb{R}$.

Frage

Unter welchen Bedingungen existieren Maximum und Minimum einer Funktion f?

Erinnerung

Bemerkung: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt.

- Falls f nach oben beschränkt, dann gilt: $f(x) \leq \sup_{x \in d} f(x)$.
- Falls f nach unten beschränkt, dann gilt: $f(x) \geq \inf_{x \in d} f(x)$.

Aber: Infimum bzw. Supremum müssen nicht angenommen werden!
(Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D =]0, \infty[$.)

Definition

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

- Falls x_0 existiert, so dass $f(x_0)$ gleich dem Supremum, d.h.

$$f(x) \leq f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x), \quad \forall x \in D,$$

  so heißt $f(x_0)$ das Maximum von f (schreibe $\max_{x \in D} f(x) = f(x_0)$).

- x_0 heißt dann Maximalstelle von f.

- Falls x_0 existiert, so dass $f(x_0)$ gleich dem Infimum, d.h.

$$f(x) \geq f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x), \quad \forall x \in D,$$

  so heißt $f(x_0)$ das Minimum von f (schreibe $\min_{x \in D} f(x) = f(x_0)$).

- x_0 heißt dann Minimalstelle von f.

Mengeneigenschaften

Definition: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge.

- A heißt abgeschlossen, wenn alle Häufungspunkte a der Menge A auch Elemente der Menge sind, d.h. $a \in A$.
- A heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Bemerkung: Abgeschlossene Intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle sind kompakte Mengen in $\mathbb{R}$.

Frage

Unter welchen Bedingungen existieren Maximum und Minimum einer Funktion f?

Satz von Weierstrass

Satz (Weierstrass): Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und besitzt Maximum und Minimum;

d.h. $\exists x_0, x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in [a, b]$.

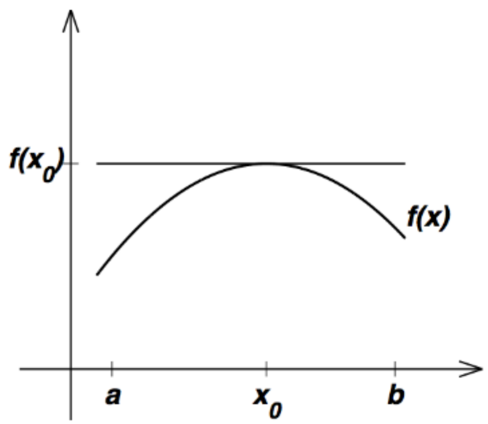
Bemerkung: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nimmt also auf $[a, b]$ Maximum und Minimum an!

1

Differenzierbarkeit
Motivation

Berechnung von Tangenten

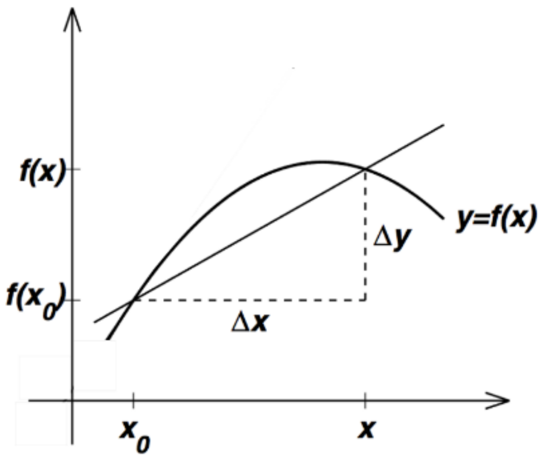
- Geschwindigkeiten aus Weg-Zeit Kurven
- Tendenzen
- Maxima/Minima (Tangente Null)



Differenzenquotient

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. Für $x_0, x \in I$ ist der Differenzenquotient definiert durch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$



Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall.
f heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

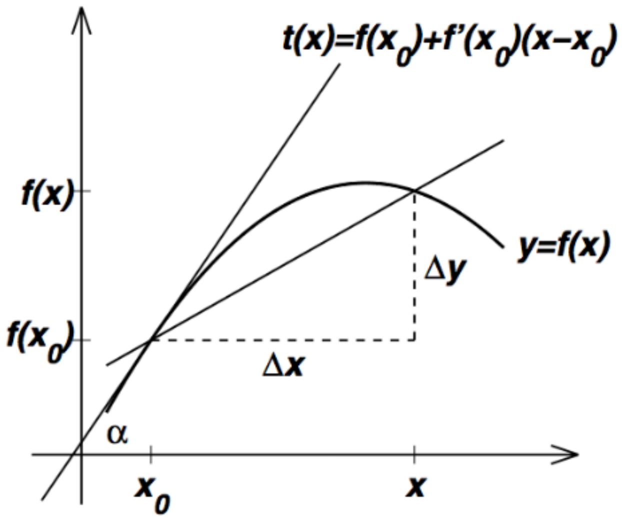
Bezeichnungen: Der Grenzwert wird mit

$$f'(x_0), \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0), \text{ oder } \frac{df}{dx}|_{x=x_0}$$

bezeichnet und Ableitung oder Differentialquotient von f in x_0 genannt.

Eigenschaften:

- Geometrisch: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Steigung der Sekante an f in x und x_0.
- Grenzübergang: x rückt näher an x_0, damit nähert sich Steigung der Sekante der Tangente $f'(x_0)$ an.
- Tangente: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ existiert genau dann, wenn f in x_0 differenzierbar ist.
- Winkel: Anstieg $f'(x_0)$ beschreibt $\tan\alpha$, mit α dem Winkel zwischen Tangente und x-Achse.



2

Rechts-/linksseitige Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall und sei $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. f heißt rechts- bzw. linksseitig differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \searrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ bzw. } \lim_{\Delta x \nearrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existiert.

Bemerkung: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar, falls rechts- und linksseitiger Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ existieren und gleich sind.

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. f heißt differenzierbar auf $I \subset D$, falls f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist, und in jedem zu I gehörigen Randpunkt einseitig differenzierbar ist.

Satz
Dan

Frage: Ist $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$

1. rechtsseitig differenzierbar?
2. linksseitig differenzierbar?
3. differenzierbar?

sind.

$\subset D$,
rigen

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion in x_0 differenzierbar. Dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht!
Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

3

Different

Differentiationsregeln

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ableitungen der Grundfunktionen: Es gilt:

- $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, mit $\nu \in \mathbb{Z}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, und $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(e^x)' = e^x$ und $(a^x)' = a^x \ln a$ mit $a > 0$;
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, falls $x \neq 0$;
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, falls $a > 0$, $x \neq 0$;

Umkehrfunktion: Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Die unabh. Veränderliche nennen wir wieder x.
Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f.

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Umkehrfunktion: Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Die unabh. Veränderliche nennen wir wieder x.
Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f.

Ableitungen der Grundfunktionen: Es gilt:

- $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, mit $\nu \in \mathbb{Z}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, und $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(e^x)' = e^x$ und $(a^x)' = a^x \ln a$ mit $a > 0$;
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, falls $x \neq 0$;
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, falls $a > 0$, $x \neq 0$;