Analysis I

06.12.2016

J. Behrens

① Beweis des Satzes von Weierstrass:

a) Beschränktheit: Beweis durch Widerspruch

Erinnerung: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

- Annahme: f nicht nach oben beschränkt
- Also: zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n \in [a,b]$: $f(x_n) > n$
- (x_n) ist ein eine Folge in $[a,b]$ beschränkt
(Bolzano-Weierstrass)
- $\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x} \in [a,b]$
- Stetigkeit von f : $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$
- Da aber $f(x_{n_k}) > n_k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ ↯ zu Stetigkeit.

b) Existenz des Maximums:

- wegen Beschränktheit existiert $s := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.
- Also: zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $\exists f(x_n) : s - \frac{1}{n} < f(x_n) < s$
- Wir erhalten Folge (x_n) mit $x_n \in [a,b]$ und es gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = s$ (*)
- Da (x_n) durch $[a,b]$ beschränkt $\exists$ konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $\bar{x} \in [a,b]$
- wg. Stetigkeit von f gilt aber $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$ (**)
- Aus (*) und (**) $\Rightarrow$ $f(\bar{x}) = s$
- Also ist $\bar{x}$ Maximalstelle und $f(\bar{x}) = \max(f)$.

c) Existenz des Minimums folgt analog. $\boxtimes$

② Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$

- Differenzenquotient: $\dfrac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$

$$= \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 \cancel{\Delta x} + 3x_0 \Delta x^{\cancel{2}} + \Delta x^{\cancel{3}} - \cancel{x_0^3}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2$$

- Ableitung: $\lim_{\Delta x \to 0} 3x_0^2 + \underbrace{3x_0 \Delta x + \Delta x^2}_{\to 0} = 3x_0^2 = f'(x_0)$

③ <u>Beweis des Satzes:</u>

- Der Differenzenquotient $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ konvergiert wegen der Diff'barkeit für $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gegen $f'(x_0)$.

- Also $f(x_n) - f(x_0) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot (x_n - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$ $(n \to \infty)$

- Damit ist f in x_0 stetig nach Def. $\boxtimes$

④ Einige Nachweise zu Differentiationsregeln:

a) Kettenregel:

- Definiere $f^*(y) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{falls } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{falls } y = y_0 \end{cases}$

- Da f in $y_0 = g(x_0)$ diff'bar gilt $\lim\limits_{y \to y_0} f^*(y) = f^*(y_0) = f'(y_0)$

- Außerdem: $f(y) - f(y_0) = f^*(y)\,(y - y_0)$

- Damit:
$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^*(g(x_0))\,(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}$$
$$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} f^*(g(x_0))}_{} \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{}$$

$$= f'(g(x_0)) \quad g'(x_0)$$

b) Umkehrfunktion:

- Es gilt $f(f^{-1}(x)) = x$
- Ableitung mit Kettenregel: $f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x) = 1$

  oder $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

c) sin:

- Differenzenquotient: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x}$
- lim + Additionstheoreme: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin x_0 \cdot \cos \Delta x + \cos x_0 \cdot \sin \Delta x - \sin x_0}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin x_0 \underbrace{\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}_{\to 0} + \cos x_0 \underbrace{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{\to 1} \right)$$

- Erinnere $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0$
- Also: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x_0 = \sin' x_0$