Analysis I

J. Behrens

20.12.2016

① Beweis des Horner Schemas:

<u>Idee:</u> Berechne direkt $p(x) = (x-x_0)\,g(x) + b_0$

$$\begin{aligned}
(x-x_0)\,g(x) + b_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^{k+1} - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k + b_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k x^k - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k + b_0 \\
&= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k \\
&= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - x_0 b_{k+1})\, x^k \\
&= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = p(x) \qquad \boxtimes
\end{aligned}$$

Nomenklatur: $k = 1:n$

bedeutet $k = 1, \dots, n$

entsprechend $\sum\limits_{k=1:n}$

bedeutet $\sum\limits_{k=1}^{n}$

② Beweis des Satzes von Taylor:

- Sei $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ beliebig aber fest.

a) Falls $x = x_0 \Rightarrow R_n(x_0) = 0$ und $f(x) = f(x_0)$

damit ist für diesen Fall der Satz bewiesen.

b) • Sei also $x \neq x_0$, $x \in I$. Bestimme $c_x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + c_x (x-x_0)^p \quad (*)$$

- Ersetze x_0 durch z und halte x und c_x fest. Dann definiert dies eine Funktion $F(z)$:

$$F(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n + c_x (x-z)^p \quad (z \in I) \quad (**)$$

- Es gilt: $F(x) = f(x)$, und $F(x_0) = f(x)$

$\Rightarrow F(x) = F(x_0)$

- Satz von Rolle: $\exists\ \xi$ zwischen x und x_0 : $F'(\xi) = 0$

- Aus (**) erhält man

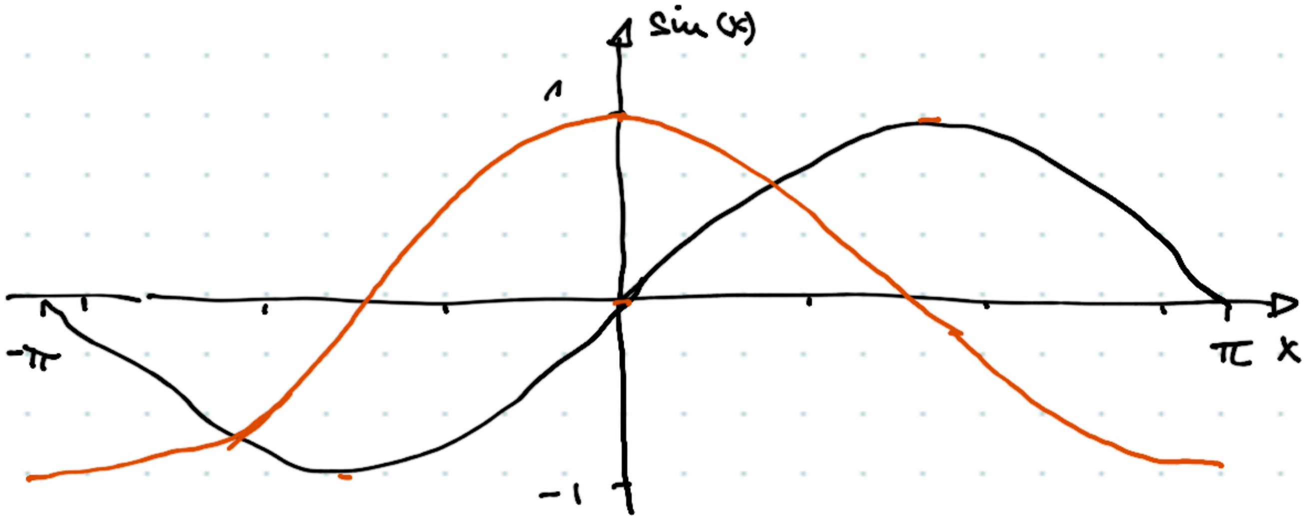
$$F'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z) - c_x\, p\,(x-z)^{p-1}$$

- Da $F'(\xi) = 0 \Rightarrow c_x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, p}(x-\xi)^{n+1-p}$

- Einsetzen in (*) $\Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, p}(x-x_0)^p (x-\xi)^{n+1-p}$

$\boxtimes$

Ableitungen von $\sin x$ graphisch:



③ Beispiel: McLaurin-Formel für $f(x) = e^x$.

- $f^{(k)}(x) = e^x \quad ; \quad f^{(k)}(0) = 1$

- Taylor-Polynom: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

- Für das Restglied gilt:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} \right| \cdot |x|^{n+1} = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1}$$

$$\leq \frac{e^{\vartheta |x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \leq \underbrace{\frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}}_{\circledast}$$ unabh. von ϑ !

- Für x fest konvergiert $\circledast$ gegen Null konvergiert $(n \to \infty)$

Es existiert immer $p \in \mathbb{N}$: $p - 1 \leq |x| < p$

Damit:

$$\frac{n!}{|x|^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot p \cdot \dots \cdot n}{|x| \cdot |x| \cdot \quad \dots \quad \cdot |x|} \geq \frac{(p-1)!}{|x|^{p-1}} \cdot \left(\frac{p}{|x|} \right)^{n-(p+1)} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \infty$$

- Also $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$ für $n \to \infty$

Für $n \to \infty$ konvergiert das Taylorpolynom $T_n(x)$ gegen e^x.

Analysis I

22. 12. 2016

① Beweis des Satzes von Horner:

<u>Idee</u>: Berechne direkt: $p(x) = (x-x_0)g(x) + b_0$

$$(x-x_0)g(x) + b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^{k+1} - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k + b_0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k x^k - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k + b_0$$

$$= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k - x_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k$$

$$=. \quad a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - x_0 b_{k+1}) x^k$$

$$= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = p(x) \quad \boxtimes$$

② Beweis des Satzes von Taylor:

- Sei $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ beliebig aber fest gewählt.

a) Falls $x = x_0 \Rightarrow R_n(x_0) = 0$ und $f(x) = f(x_0)$, damit gilt der Satz.

b) Sei also $x \neq x_0$

- $x \in I$, bestimme $c_x \in \mathbb{R}$:

$$\circledast \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + c_x (x-x_0)^p$$

- Ersetze x_0 durch z, halte x und c_x fest, definiere

$$(**) \quad F(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n + c_x (x-z)^p$$

- Es gilt $F(x) = f(x)$ und $F(x_0) = f(x)$

$$\Rightarrow \quad F(x) = F(x_0)$$

- Satz von Rolle $\Rightarrow \exists\, \xi$ zwischen x und x_0: $F'(\xi) = 0$

- Aus (**) erhält man

$$F'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - c_x\, p\, (x-z)^{p-1}$$

- Da $F'(\xi)=0 \Rightarrow c_x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-\xi)^{n+1-p}$
- Einsetzen in $\circledast$: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n+1-p}$

$\boxtimes$

③ McLaurin-Formel für $f(x)=e^x$:

- $f^{(k)}(x) = e^x$; $f^{(k)}(0) = 1$
- Taylor-Polynom: $T_n(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$
- Restglied : $|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| \cdot |x|^{n+1}$

$$= \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

$$\leq \frac{e^{\theta|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

$$< \underbrace{\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}}_{\text{unabh. von } \theta\,!} \quad \circledast$$

- Für x fest konvergiert $\circledast$ gegen 0 $(n\to\infty)$

Es ex. immer ein $p\in\mathbb{N}$: $p-1 \leq |x| < p$:

$$\frac{n!}{|x|^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \cdot p \cdot \ldots \cdot n}{|x| \cdot |x| \cdot \ldots \cdot |x|} \geq \frac{(p-1)!}{|x|^{p-1}} \cdot \left(\frac{p}{|x|}\right)^{n-(p-1)} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \infty$$

- Also $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$ für $(n \to \infty)$