

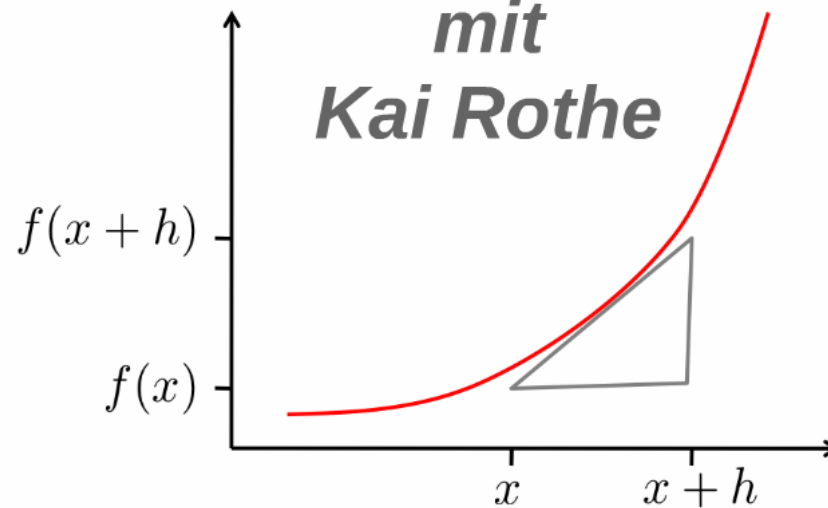
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens

mit

Kai Rothe



Taylor-Entwicklung

Buch Kapitel 2.9

Polynome

Polynom

Erinnerung: Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Horner Schema

Beobachtung:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0$$

$$= x(x(\dots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \dots + a_1) + a_0.$$

Frage: Wie auswerten?

	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
+		$b_n x_0$	\dots	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
$x_0 *$	$b_n = a_n$	b_{n-1}	\dots	b_1	$b_0 = p(x_0)$

Horner Schema

Satz: Sei $p(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$ Polynom. Sei weiter $b_n = a_n$, $b_j = a_j + b_{j+1} x_0$ für $k = (n-1) : -1 : 0$ (d.h. $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$), und $g(x) = \sum_{k=0:n-1} b_{k+1} x^k$. Dann gilt für $x \neq x_0$

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = g(x) + \frac{b_0}{x - x_0}.$$

1

Polynom

Erinnerung: Polynom

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0:n} a_k x^k \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Frage: Wie auswerten?

Horner Schema

Beobachtung:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
 &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \\
 &= x(x(\dots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \dots + a_1) + a_0.
 \end{aligned}$$



	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
+		$b_n x_0$	\dots	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
x_0^*	$b_n = a_n \nearrow$	$b_{n-1} \nearrow$	$\dots \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = p(x_0).$

Beispiel

Beispiel: $n = 4$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x(x(x(a_4x + a_3) + a_2) + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

Idee: Rekursives Berechnungsschema für die Berechnung von $p_4(x_0)$.

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = a_3 + b_4x_0$$

$$b_2 = a_2 + b_3x_0$$

$$b_1 = a_1 + b_2x_0$$

$$b_0 = a_0 + b_1x_0 = p_4(x_0)$$

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
+		b_4x_0	b_3x_0	b_2x_0	b_1x_0
x_0*	$b_4 \nearrow$	$b_3 \nearrow$	$b_2 \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = q(x_0)$

Horner Schema

Beobachtung:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
 &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \\
 &= x(x(\dots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \dots + a_1) + a_0.
 \end{aligned}$$



	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
+		$b_n x_0$	\dots	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
x_0^*	$b_n = a_n \nearrow$	$b_{n-1} \nearrow$	$\dots \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = p(x_0).$

Horner Schema

Satz: Sei $p(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$ Polynom. Sei weiter $b_n = a_n$, $b_j = a_j + b_{j+1}x_0$ für $k = (n-1) : -1 : 0$ (d.h. $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$), und $g(x) = \sum_{k=0:n-1} b_{k+1} x^k$.
Dann gilt für $x \neq x_0$

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = g(x) + \frac{b_0}{x - x_0}.$$



Polynom- Entwicklung

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt ($k = 0 : n$):

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt ($k = 0 : n$):

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Taylor Polynom

Vorbemerkung

Beobachtung: Falls $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar ist, und falls

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

so ist

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für $k = 0 : n$.

Interpretation: $T_n(x)$ ist ein Polynom, das an der Stelle $x = x_0$ mit f allen Ableitungen (bis zur n -ten Ordnung) übereinstimmt. Dieses Polynom ist das einzige mit diesen Eigenschaften.

Definition

Definition:

- Das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

heißt **Taylor-Polynom** n -ten Grades für die Funktion f .

- x_0 heißt dann die **Entwicklungsstelle**.
- Die Kurven $y = T_n(x)$ heißen **Schmiegeparabeln** an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Restglied

Wenn $f(x) \approx T_n(x)$, dann kann man den Fehler ausdrücken als

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

Frage: wie groß ist $R_n(x)$?

Im Allgemeinen: $R_n(x)$ hängt von f und x_0 ab.

Vorbemerkung

Beobachtung: Falls $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar ist, und falls

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

so ist

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für $k = 0 : n$.

Interpretation: $T_n(x)$ ist ein Polynom, das an der Stelle $x = x_0$ mit f allen Ableitungen (bis zur n -ten Ordnung) übereinstimmt.

Dieses Polynom ist das einzige mit diesen Eigenschaften.

Definition

Definition:

- Das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

heißt **Taylor-Polynom** n -ten Grades für die Funktion f .

- x_0 heißt dann die **Entwicklungsstelle**.
- Die Kurven $y = T_n(x)$ heißen **Schmiegeparabeln** an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Restglied

Wenn $f(x) \approx T_n(x)$, dann kann man den Fehler ausdrücken als

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

Frage: wie groß ist $R_n(x)$?

Im Allgemeinen: $R_n(x)$ hängt von f und x_0 ab.

Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n + 1)$ -mal differenzierbar.
Sei weiter $x_0 \in I$ fest.

Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$
mindestens ein ξ zwischen x und x_0 , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} (x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt **Taylor-Formel** mit dem Restglied $R_n(x)$
in der **Schlömilch-Form**.

2

Übersicht:

- f ist $(n+1)$ -mal differenzierbar auf I
- $x_0 \in I$ ist ein fester Punkt in I
- $x \in I$ ist ein beliebiger Punkt in I
- $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ist ein beliebiges

$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} (x - \xi)$

mit ξ zwischen x_0 und x

Das ist die **Schlömilch-Form** der Taylor-Formel.

Bemerkungen:

- Interessant ist oft vor allem die Form des Restgliedes $R_n(x)$.
- $|R_n(x)|$ gibt den Fehler bei der Approximation $T_n(x) \approx f(x)$ an. Wünschenswert ist obere Schranke, unabhängig von ξ .
- Häufig verwendet man die **Lagrange-Form** von $R_n(x)$ ($p = n + 1$) für die Abschätzung:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n}, \quad (0 < \theta < 1).$$

- Der Spezialfall der Taylor-Formel für $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \quad \text{mit } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n + 1)!} x^{n+1}$$

heißt **McLaurin-Formel**.

Beispiel

McLaurin-Formel für $\sin(x)$

Beispiel: Sei $y = f(x) = \sin x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(0) = \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)$$

Für gerade $k = 2\nu$ bzw. ungerade $k = 2\nu + 1$ gilt also

$$f^{(2\nu)}(0) = 0, \text{ bzw. } f^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^\nu.$$

Das Taylor-Polynom ist dann gegeben durch

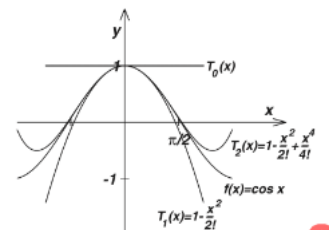
$$\begin{aligned} T_{2\nu+2}(x) &= \sum_{n=0, n \neq 2\nu} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sin x = \sum_{\nu=0, n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + R_{2\nu+2}(x)$$

mit

$$R_{2\nu+2}(x) = (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu+3}}{(2\nu+3)!} \sin(\theta x).$$



McLaurin-Formel für $\sin(x)$

Beispiel: Sei $y = f(x) = \sin x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(0) = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Für gerade $k = 2\nu$ bzw. ungerade $k = 2\nu + 1$ gilt also

$$f^{(2\nu)}(0) = 0, \text{ bzw. } f^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^\nu.$$

Das Taylor-Polynom ist dann gegeben durch

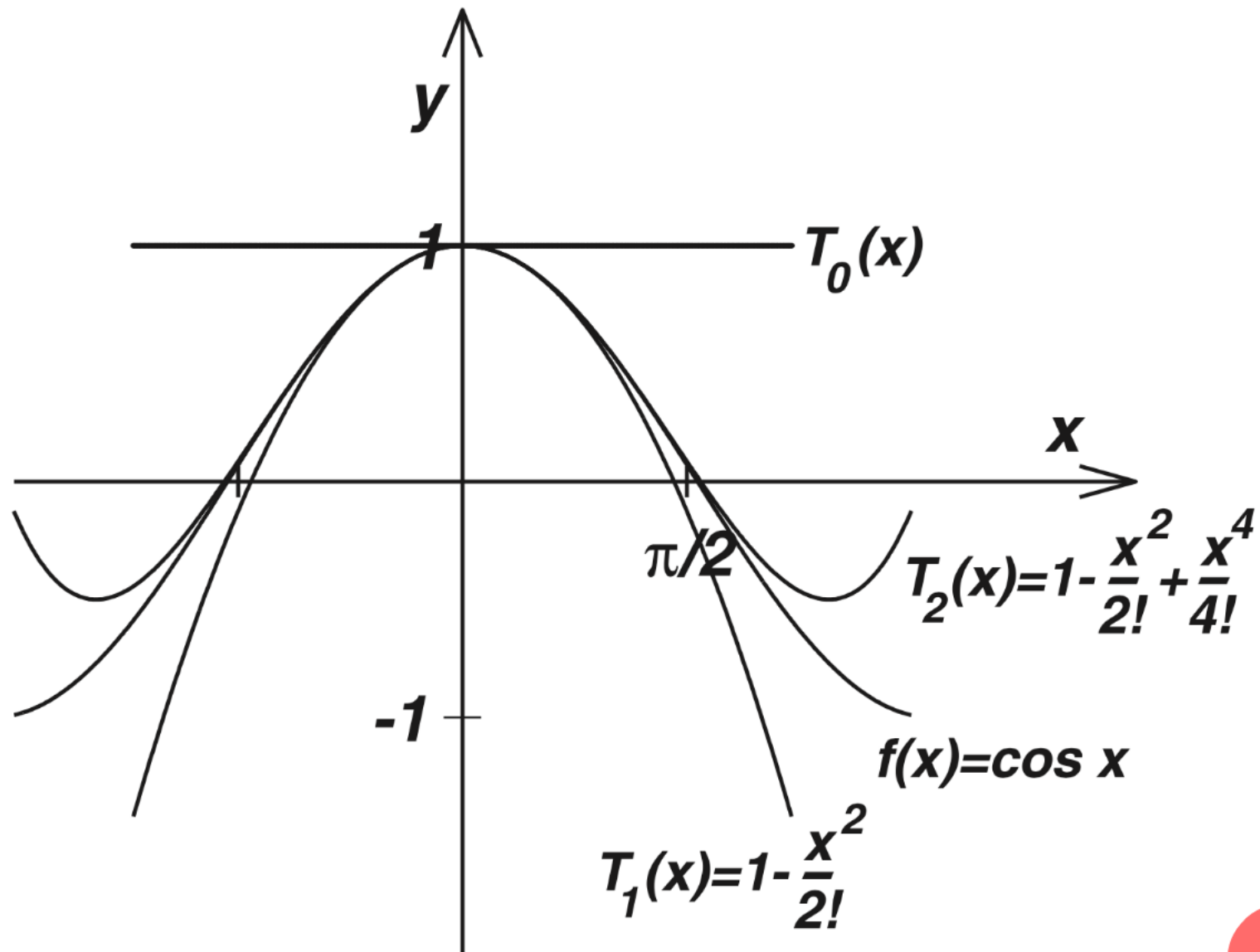
$$\begin{aligned} T_{2n+2}(x) &= \sum_{\nu=0:n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

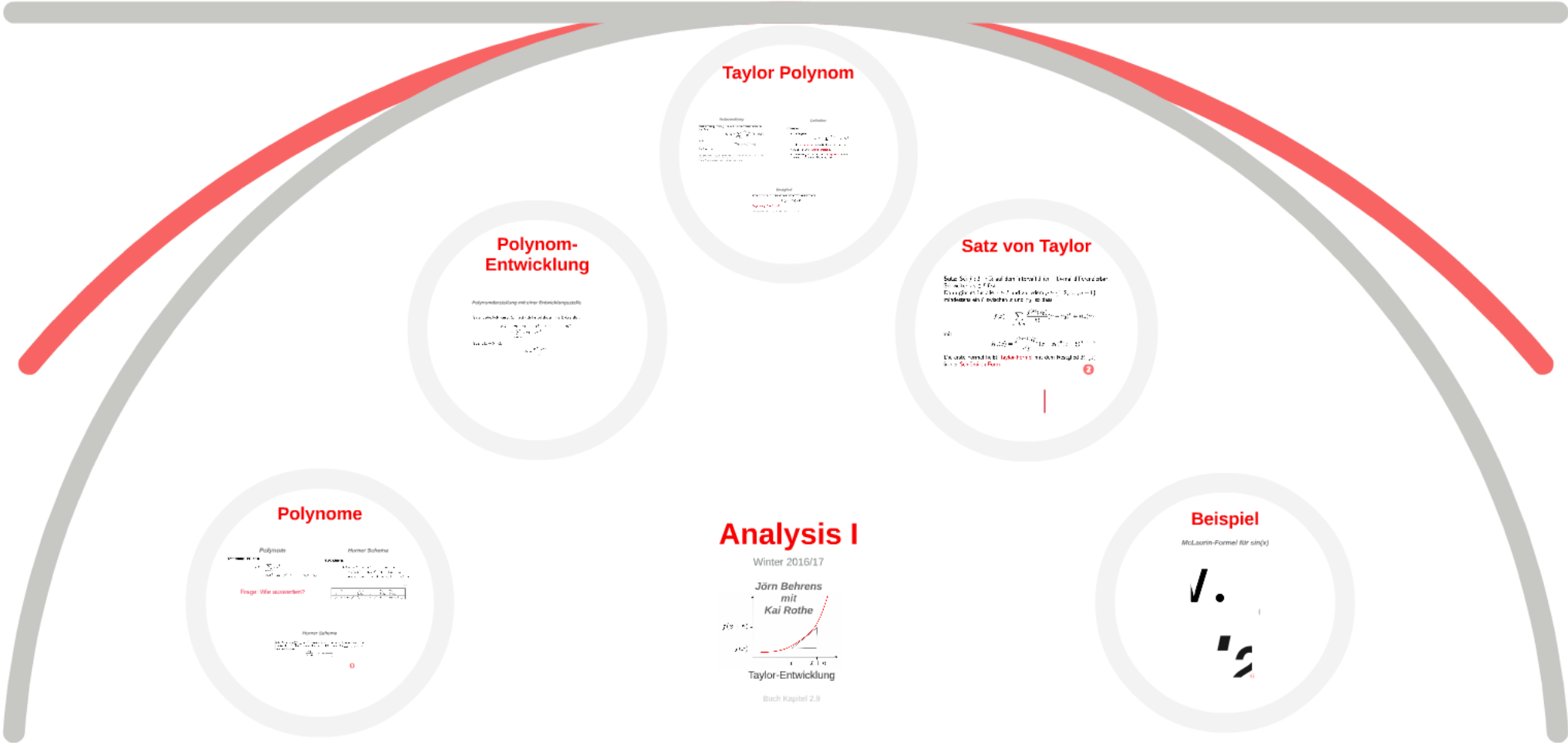
Es gilt also

$$\sin x = \sum_{\nu=0:n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + R_{2n+2}(x)$$

mit

$$R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin(\theta x).$$





Taylor Polynom

Definition
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$ ein Punkt in D .
 Das Taylor Polynom T_n der Ordnung n von f in a ist das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$
 welches f in a bis zur Ordnung n approximiert.
Beispiel
 Entwicklung von $f(x) = \sin(x)$ in $a = 0$.

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Polynom-Entwicklung

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungspolynom
 Sei $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ein Polynom.
 Entwicklung um $a = -1$.

$$f(x) = (x+1)^2 = 1 + 2(x+1) + (x+1)^2$$

Satz von Taylor

Satz 9.12 (Satz von Taylor) Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$ ein Punkt in D .
 Sei T_n das Taylor Polynom der Ordnung n von f in a .

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$
 wobei $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ für ein ξ zwischen a und x .
Beispiel
 Entwicklung von $f(x) = \sin(x)$ in $a = 0$.

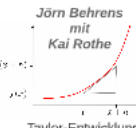
$$f(x) = T_3(x) + R_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4$$

Polynome

Polynome
 Ein Polynom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ hat Grad n .
Horner-Schema
 Frage: Wie addieren?

$$\begin{array}{r|l} & x^2 & x & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Analysis I

Winter 2016/17
Jörn Behrens mit Kai Rothe

 Taylor-Entwicklung
 Buch Kapitel 2.9

Beispiel

McLaurin-Formel für $\sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$