

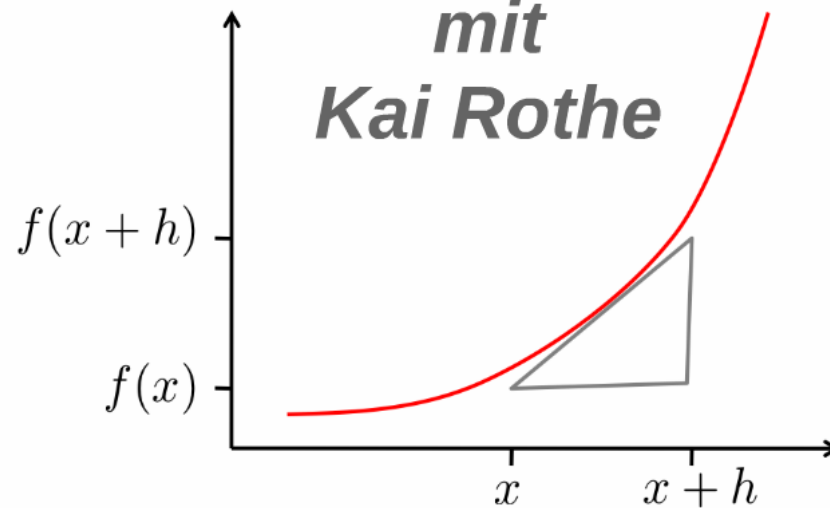
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens

mit

Kai Rothe



Extremalprobleme und Nullstellen

Buch Kapitel 2.10 und 2.11

Erinnerung: Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n + 1)$ -mal differenzierbar.
Sei weiter $x_0 \in I$ fest.
Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$
mindestens ein ξ zwischen x und x_0 , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} (x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt **Taylor-Formel** mit dem Restglied $R_n(x)$
in der **Schlömilch-Form**.

Ziel jetzt: Notwendige und hinreichende
Bedingungen für Extrema von Funktionen

Definition

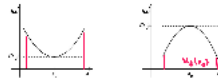
lokales Extremum

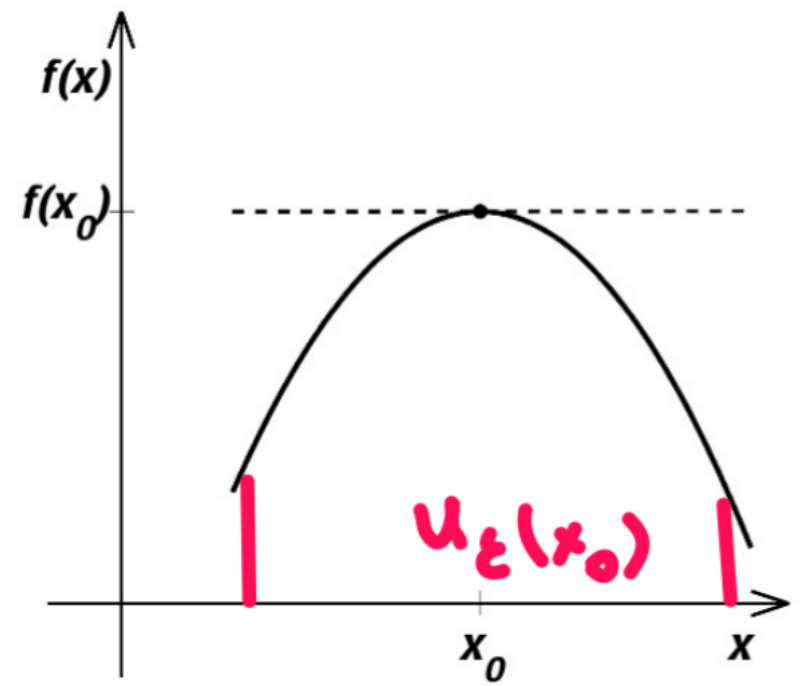
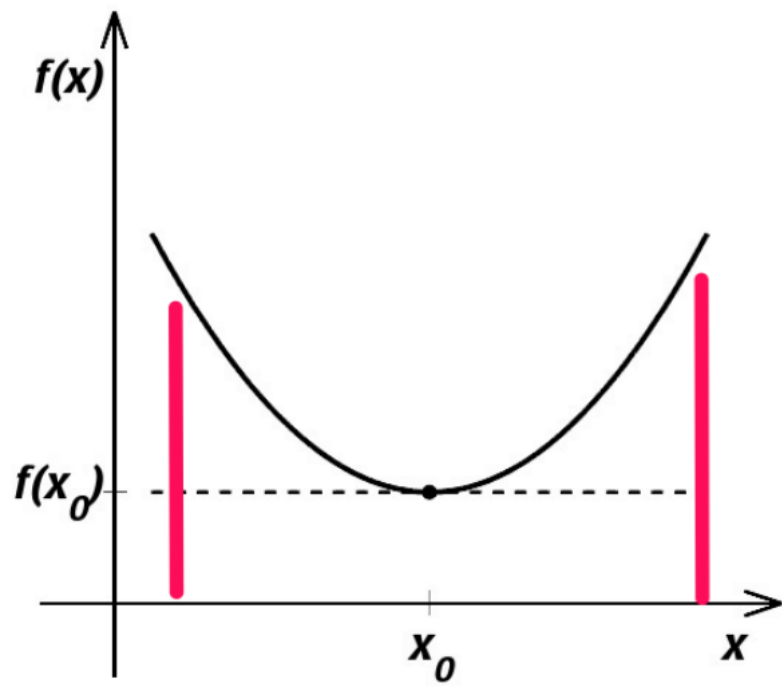
Definition: Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Intervall I in x_0 ein **lokales Maximum** (Minimum), falls es eine ϵ -Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, in der gilt

$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in I \cap U_\epsilon(x_0).$$

$f(x_0)$ ist also größter (kleinster) Funktionswert in der ϵ -Umgebung.

- x_0 heißt **Maximalstelle** (Minimalstelle).
- Die Zahl $f(x_0)$ heißt lokales **Maximum** (Minimum).
- Ist sogar $f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$), so heißt x_0 **echte** lokale Maximalstelle (Minimalstelle) und $f(x_0)$ echtes lokales Maximum (Minimum).
- Statt *lokal* sagt man auch **relativ**.





Bedingungen für lokale Extrema

Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer auf I differenzierbaren Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

- a) $f'(x_0) = 0$, oder
- b) x_0 ist Randpunkt von I .

1

Satz: (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Wenn für f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0,$$

so hat f dort ein lokales Maximum.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann ist in x_0 ein lokaler Wendepunkt gegeben.

2

Bemerkung: Der Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema) lässt sich verallgemeinern:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 n -mal stetig differenzierbar und gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Ist n gerade, dann hat f an x_0 lokales Extremum, und zwar
 - falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum,
 - falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein lokales Maximum.
- Ist n ungerade, so hat f an x_0 einen Wendepunkt.

Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer auf I differenzierbaren Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

a) $f'(x_0) = 0$, oder

b) x_0 ist Randpunkt von I .

Satz: (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Wenn für f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0,$$

so hat f dort ein lokales Maximum.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann ist in x_0 ein lokaler Wendepunkt gegeben.



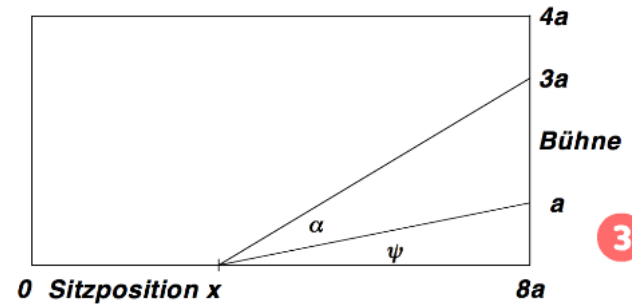
Bemerkung: Der Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema) lässt sich verallgemeinern:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 n -mal stetig differenzierbar und gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Ist n **gerade**, dann hat f an x_0 lokales Extremum, und zwar
 - falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum,
 - falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein lokales Maximum.
- Ist n **ungerade**, so hat f an x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel: Optimale Sitzposition im Fußballstadion



Berechnung von Nullstellen

Wichtige Aufgabenstellung: Finde $x \in D \subset \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = 0,$$

wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i.Allg. nichtlineare reelwertige Funktion.

Problem: Häufig ist die Lösung nicht in geschlossener Form verfügbar. Näherungen können mit Hilfe einer Iterationsfolge gewonnen werden. Grundlage dafür ist der **Bannachsche Fixpunktsatz**.

Fixpunkt

Definition: Sei $f : I \rightarrow I$ eine Funktion, die das reelle Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in sich selbst abbildet. Jede Lösung \bar{x} der Gleichung

$$x = f(x)$$

heißt **Fixpunkt** von f . Die Gleichung heißt **Fixpunktgleichung**.

Bemerkung: Jede Gleichung $g(x) = 0$ kann durch Einführung von

$$f(x) := g(x) + x$$

als Fixpunktgleichung $x = f(x)$ formuliert werden.

Geometrisch: Der Fixpunkt ist gerade die x -Koordinate des Schnittpunktes von

1. Gerade $y = x$ und
2. Funktion $y = f(x)$.

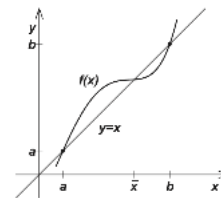


Abbildung:

- f bildet jeden Punkt $x \in I$ auf $f(x) \in I$ ab.
- Ursprung und Bildpunkt sind i.Allg. unterschiedlich.
- \bar{x} wird nun aber durch $f(\bar{x}) = \bar{x}$ auf sich selbst abgebildet.
- \bar{x} bleibt also unter der Abbildung von f fix (fest).

Definition: Sei $f : I \rightarrow I$ eine Funktion, die das reelle Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in sich selbst abbildet. Jede Lösung \bar{x} der Gleichung

$$x = f(x)$$

heißt **Fixpunkt** von f . Die Gleichung heißt **Fixpunktgleichung**.

Geometrisch: Der Fixpunkt ist gerade die x -Koordinate des Schnittpunktes von

1. Gerade $y = x$ und
2. Funktion $y = f(x)$.

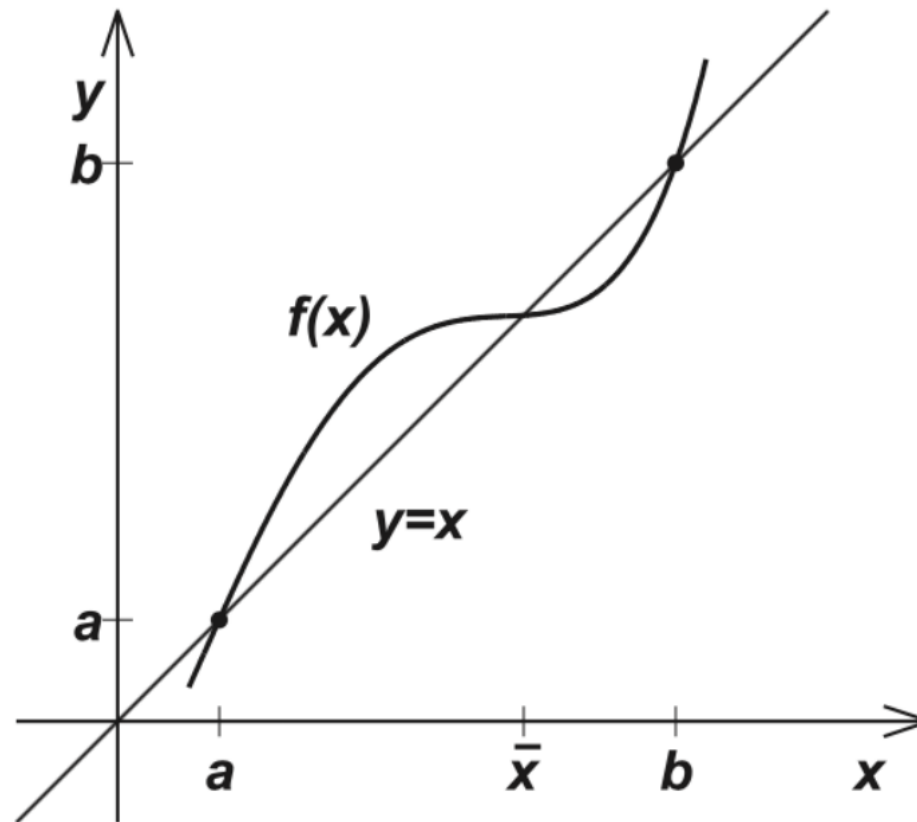


Abbildung:

- f bildet jeden Punkt $x \in I$ auf $f(x) \in I$ ab.
- Ursprung und Bildpunkt sind i.Allg. unterschiedlich.
- \bar{x} wird nun aber durch $f(\bar{x}) = \bar{x}$ auf sich selbst abgebildet.
- \bar{x} bleibt also unter der Abbildung von f fix (fest).

Bemerkung: Jede Gleichung $g(x) = 0$ kann durch Einführung von

$$f(x) := g(x) + x$$

als Fixpunktgleichung $x = f(x)$ formuliert werden.

Fixpunktiteration

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Folge?

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in \mathbb{R})

Sei $f : I \rightarrow I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt. 4

Corollar: Mit den Voraussetzungen des Bannachschen Fixpunktsatzes gelten folgende Fehlerabschätzungen:

- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$ (a priori Abschätzung)
- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-K} |x_{n+1} - x_n|$ (a posteriori Abschätzung)

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Folge?

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in \mathbb{R})

Sei $f : I \rightarrow I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

4

Corollar: Mit den Voraussetzungen des Bannachschen Fixpunktsatzes gelten folgende Fehlerabschätzungen:

- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$ (**a priori** Abschätzung)
- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-K} |x_{n+1} - x_n|$ (**a posteriori** Abschätzung)

Extremwerte

Erinnerung: Satz von Taylor

Satz: Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I (in \mathbb{R}) n -mal diffbar. Sei $a \in I$ und $x \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$ und zu jedem $\epsilon \in (0, |x-a|)$ mindestens ein ξ zwischen a und x , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n = o(\epsilon^n) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0$$

Die erste Formel heißt **Taylor-Formel**, mit dem Zusatz $R_n(x)$ in der **Schreibweise**.

Ziel jetzt: Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema von Funktionen

Definition lokales Extremum

Definition: Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in einem Punkt $a \in D$ ein **lokales Maximum** (Minimum), falls eine Umgebung $U(a)$ gibt, in der gilt

$$f(x) \leq (f(x) \geq) f(a) \quad \forall x \in U(a)$$

$U(a)$ ist das größte (kleinste) Funktionswert in der Umgebung

- a heißt **Minimalstelle** (Minimumstelle)
- Die Zahl $f(a)$ heißt **lokales Maximum** (Minimum)
- Ist weder $f(a)$ ein lok. Max. ($f(x) \leq f(a)$), so heißt a **kein** lokales Maximum (Minimum) und $f(a)$ **kein** lokales Maximum (Minimum).
- Beachte: a ist auch ein lok. Min.

$$f(x) \leq f(a) \leq f(x)$$

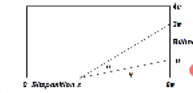
Bedingungen für lokale Extrema

Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extrema):
Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in einem Punkt $a \in D$ ein lokales Extremum besitzt. Dann gilt:
1. $f'(a) = 0$
2. $f''(a) \neq 0$

Man kann zeigen, dass diese Bedingungen notwendig sind. Das heißt, wenn f in a ein lokales Extremum besitzt, dann muss $f'(a) = 0$ und $f''(a) \neq 0$ gelten. Umgekehrt gilt dies nicht.

Beispiel: Sei $f(x) = x^3$. Dann gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$. Dennoch ist f in 0 weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.

Beispiel: Optimale Sitzposition im Fußballstadion



Analysis I

Winter 2016/17

Ziele

Klausur

Extremwerte

Extremwerte und Nullstellen

Mathematik

Berechnung von Nullstellen

Wichtige Aufgabenstellung: Find $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = 0$$

wobei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (Allg. nicht lineare) reellwertige Funktion.

Problem: Lösung ist die Lösung nicht in geschlossener Form verfügbar. Neben, spez können in Hilfe einer Iteration erzielte gewonnen werden. Grundprinzip ist die **Bisektion** oder **Fixpunkt**.

Fixpunkt

Definition: Ein Punkt $x \in D$ heißt Fixpunkt der Funktion $f: D \rightarrow D$, falls $f(x) = x$ gilt.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Dann gilt $f(2) = 2$, also ist 2 ein Fixpunkt.



Beispiel: Sei $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Dann gilt $f(2) = 2$, also ist 2 ein Fixpunkt.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Dann gilt $f(2) = 2$, also ist 2 ein Fixpunkt.

Fixpunktiteration

Man kann zeigen, dass die Fixpunktiteration für eine Funktion $f: D \rightarrow D$ konvergiert, wenn f eine Kontraktion ist. Das heißt, wenn $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in D$ gilt.

Satz: Sei $f: D \rightarrow D$ eine Funktion, die eine Kontraktion ist. Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen den Fixpunkt x^* von f .

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen den Fixpunkt $x^* = 2$.

Fixpunkte